**ANALIZA TEORETYCZNA I DOŚWIADCZALNA ROZKŁADU
TEMPERATURY W WIELOWARSTWOWEJ STRUKTURZE**

**ТЕОРЕТИЧНИЙ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ РОЗПОДІЛУ
ТЕМПЕРАТУР У БАГАТОШАРОВІЙ СТРУКТУРІ**

**THE THEORETICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS OF
TEMPERATURE DISTRIBUTION IN MULTI-LAYERED STRUCTURE**

Szlachetka, O., dr inż., adiunkt, 0000-0002-1195-3603, Bagdasaryan, V., dr inż., adiunkt, 0000-0002-9589-1453, Wągrowaska M., dr hab., profesor, 0000-0001-6805-8813, Dohojda M., dr inż., adiunkt, 0000-0003-0382-805X (Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie – SGGW,)

Шляхетка О., канд. техн. наук, доцент, 0000-0002-1195-3603, Багдасарян В., канд. техн. наук, доцент, 0000-0002-9589-1453, Вонгровська М., докт. техн. наук, професор, 0000-0001-6805-8813, Дохойда М., канд. техн. наук, доцент, 0000-0003-0382-805X (Варшавський університет наук про життя - SGGW)

Szlachetka, O., Ph.D., assistant professor, 0000-0002-1195-3603, Bagdasaryan, V., Ph.D., assistant professor, 0000-0002-9589-1453, Wągrowaska M., profesor, 0000-0001-6805-8813, Dohojda M Ph.D., assistant professor, 0000-0003-0382-805X (Warsaw University of Life Sciences – SGGW)

W pracy porównano wyniki badań doświadczalnych rozkładu temperatury w dwuskładnikowej periodycznej wielowarstwowej strukturze z wynikami otrzymanymi na drodze modelowania tolerancyjnego. Na podstawie analizy wyników stwierdzono zgodność między wynikami uzyskanymi na drodze doświadczalnej i teoretycznej.

В роботі співставленні данні експериментальних досліджень розподілу температури в двокомпонентній багатошаровій періодичній структурі з результатами розрахунків, що здобуті внаслідок теоретичного моделювання. У відповідності до виконаного аналізу вказується на збіжність результатів розрахунків, знайдених за експериментальним та теоретичним підходами.

The paper compares the results of experimental studies of the temperature distribution in a two-component multilayered periodic structure with the results obtained by the tolerance modelling procedure. The object of analysis

is a periodic structure which occupies the region $\Omega \equiv (0,22.8) \times (0,24) \times (0,24)$ and is made of six layers, where each layer is composed of two materials (OSB and styrofoam). Temperature distribution was determined within the framework of two-dimensional stationary heat conduction problem. The experimental data e.a values of temperature on interfaces were received in climatic chamber. The theoretical temperature distribution was obtained within the framework of the tolerance modelling – asymptotic variant. The aim of the paper was to validate of theoretical model equations and to check if the model is sufficient for engineering purposes. Based on the analysis of the results, a good correspondence between the model and the experiment was found.

Słowa kluczowe: struktura wielowarstwowa, rozkład temperatury, eksperyment, modelowanie tolerancyjne

багатошарова структура, розподіл температур, експеримент, теоретичне моделювання

multi-layered structure, temperature distribution, experiment, tolerance modelling

Wstęp. Zapotrzebowanie na materiały, które łączyłyby w sobie wiele właściwości np. jednocześnie były wytrzymałe, lekkie i odznaczały się dobrą izolacyjnością cieplną jest coraz większe. Takimi materiałami są np. kompozyty, wśród których szczególne miejsce zajmują kompozyty warstwowe. W pracy kompozyt warstwowy jest rozumiany jako układ składający się z warstw o stałej grubości, gdzie za warstwę uważa się układ złożony z co najmniej dwóch różnych warstwowo ułożonych składników. Różnorodność takich struktur materiałowych powoduje, że poznanie ich wszystkich cech i możliwych zachowań w konkretnych warunkach jest trudnym zadaniem, tym bardziej gdy liczba składników jest duża. W badaniach nad wielowarstwowymi strukturami dąży się do wyznaczenia np. rozkładu naprężeń, odkształceń czy temperatury. Rozkłady te określić można na podstawie doświadczeń laboratoryjnych, symulacji komputerowych bądź w sposób analityczny rozwiązując równania matematyczne opisujące dane zagadnienie. Bez względu na rodzaj rozpatrywanego zagadnienia (przewodnictwo ciepła, elastostatyka, elastodynamika, termosprężystość itp.) uzyskanie rozwiązań w dokładnej postaci analitycznej jest trudne lub czasem niemożliwe, dlatego też często stosuje się przybliżone metody modelowania analitycznego bądź numerycznego. W przypadku dwuskładniowych struktur wielowarstwowych wśród analitycznych metod modelowania wyróżnić można np. homogenizację klasyczną, modelowanie tolerancyjne. W pracy uwaga skupiona jest na metodzie modelowania tolerancyjnego [1]-[3]. Metodę tą zastosowano np. w pracy [4], gdzie dla wielowarstwowego kompozytu o funkcyjnej gradacji własności (FGM), dla stacjonarnego jednowymiarowego zagadnienia naprężeń cieplnych, porównano otrzymane za pomocą modelu tolerancyjnego (wariantu asymptotycznego) rozkłady temperatury i przemieszczeń, z rozwiązaniem dokładnym, otrzymując

dobrą zgodność wyników. Porównanie rozkładu przemieszczeń, wyznaczonego za pomocą modelu tolerancyjnego, z rozkładem wyznaczonym metodą elementów skończonych w programie Abaqus, w kompozycie typu FGM dla stacjonarnego dwuwymiarowego zagadnienia naprężeń cieplnych, można znaleźć np. w pracy [5]. Różnica między wynikami wynosiła tam maksymalnie 6,8%. W pracy [5] znajduje się również porównanie rozkładów temperatury i przemieszczeń wyznaczonych w ramach trzech różnych modeli tolerancyjnych (tolerancyjnego, tolerancyjno-asymptotycznego i asymptotycznego). Należy w tym miejscu zaznaczyć, że analiza numeryczna i analityczna w przypadku wielowarstwowych kompozytów jest bardzo skomplikowana a czasami uzyskanie rozwiązań jest wręcz niemożliwe.

W pracy podjęto próbę weryfikacji doświadczalnej uzyskanych rozwiązań równań przewodnictwa ciepła dla dwuskładnikowego periodycznego kompozytu wielowarstwowego, w ramach wybranego (najprostszego) modelu tolerancyjnego, w celu oszacowania czy rozpatrywanie tych bardziej złożonych modeli ma znaczenie praktyczne (inżynierskie).

Przedmiot rozważań. Rozpatrzono zagadnienie stacjonarnego dwuwymiarowego przewodnictwa ciepła w wielowarstwowym kompozycie charakteryzującym się periodycznym układem warstw. W układzie współrzędnych kartezjańskich $Ox_1x_2x_3$, obszar zajęty przez próbkę analizowanej struktury oznaczono przez $\Omega \equiv (0, L_1) \times (0, L_2) \times (0, L_3)$, gdzie $L_1 = 22.8$ cm, $L_2 = L_3 = 24$ cm. Założono, że struktura składa się z sześciu dwuskładniowych warstw o stałej grubości $l = 3.8$ cm. Składnikami wchodzącymi w skład warstwy będą płyta OSB (1.8cm) oraz styropian (2cm).

Metodyka i wyniki badań doświadczalnych. W pierwszym etapie zmierzono współczynnika przewodzenia ciepła λ materiałów wchodzących w skład struktury. Pomiarów dokonano w aparacie płytowym FOX 600. Badania przeprowadzono w pomieszczeniu klimatyzowanym przy temperaturze 21°C w którym panowały stabilne warunki temperaturowe i wilgotnościowe. W aparacie zastosowano gradient temperatur równy 10°C z przepływem ciepła skierowanym w górę. Wartość współczynnika przewodzenia ciepła styropianu uzyskana w badaniach (0.039W/mK) jest wyższa od wartości deklarowanej przez producenta (0.038W/mK). Współczynnik λ płyty OSB wyniósł 0.101 W/mK.

W drugim etapie badań w aparacie płytowym FOX 600 przeprowadzono pomiary efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dwuskładnikowych warstw materiałowych (styropian + płyta OSB) i porównano te wartości z obliczonymi według znanego z literatury wzoru, [1]:

$$\lambda_{eff} = \frac{\lambda_S \cdot \lambda_{OSB} \cdot l}{\lambda_S \cdot l_{OSB} + \lambda_{OSB} \cdot l_S}, \quad (1)$$

gdzie λ_S , λ_{OSB} są odpowiednio współczynnikami przewodzenia ciepła styropianu i płyty OSB, wyznaczonymi w pierwszym etapie badań, l_S , l_{OSB} są grubościami

warstwy styropianu i płyty OSB, l jest grubością dwuskładnikowej periodycznej warstwy (styropian + płyta OSB).

Zbadano dwa układy gdzie grubość $l_{OSB}=1.8\text{cm}$ była zawsze taka sama, a grubość l_s wynosiła 2 cm lub 10 cm. Wartości uśrednione z serii trzech pomiarów efektywnego współczynnika przewodzenia ciepła dla obu układów, przy rozparzeniu różnej kolejności ułożenia materiałów, przedstawiono w tabeli 1, porównując je jednocześnie z wartościami wyznaczonymi wg wzoru (1). W aparacie zastosowano gradient temperatur równy 10°C z przepływem ciepła skierowanym w górę.

. Tab. 1

Współczynnik przewodzenia ciepła materiałów

układ	efektywny współczynnik przewodzenia ciepła λ_{eff} [W/mK]		błąd względny
	pomierzony	obliczony wg wzoru (1)	
styropian 2 cm + płyta OSB 1.8 cm	0.0519 (0.0561)*	0.055	5.6% (2%)
płyta OSB 1.8 cm + styropian 2 cm	0.0517 (0.0559)*		6% (1.6%)
styropian 10 cm + płyta OSB 1.8 cm	0.0435	0.0430	1.2%
płyta OSB 1.8 cm + styropian 10 cm	0.0435		1.2%
* wartości w nawiasach uwzględniają tzw. efekt grubości warstwy styropianu.			

Większe różnice między wynikami, dla układu gdzie grubość warstw styropianu wynosiła 2cm, mogą mieć związek ze znanym z literatury efektem grubości próbek styropianowych, [6]. W celu uwzględnienia efektu grubości pomierzoną wartość współczynnika przewodzenia ciepła podzielono przez parametr efektu grubości 0.925 odczytany z [6]. Błąd względny nieprzekraczający 2% świadczy o dobrej zgodności wyników.

W kolejnym etapie badano rozkład temperatury w komorze fitotronowej (potocznie szafie klimatycznej) za pomocą umieszczonych na styku poszczególnych warstw czujników temperatury. Badania przeprowadzono w pomieszczeniu z wentylacją mechaniczną, w którym panowały stabilne warunki temperaturowe i wilgotnościowe. Pomiary temperatury były rejestrowane na cyfrowym rejestratorze temperatury WRT-16M CZAKI THERMO PRODUCT z częstotliwością co 1 minutę.

Próbkę o wymiarach 22.8x24x24cm wykonaną z naprzemiennie ustawionych warstw płyty OSB i styropianu umieszczono w szafie klimatycznej, w której zadano określone warunki brzegowe na temperaturę: $\theta(0, x_2, x_3) = 13^\circ\text{C}$, $\theta(22.8, x_2, x_3) = \theta(x_1, 0, x_3) = \theta(x_1, 24, x_3) = \theta(x_1, x_2, 0) = \theta(x_1, x_2, 24) = 5.5^\circ\text{C}$. Wykonano 5 serii pomiarów temperatury pomiędzy poszczególnymi warstwami w

próbce. Wyniki przedstawiono w tabeli 2 wraz z wartościami odchylenia standardowego oraz niepewnościami pomiaru.

Tab. 2.

Wyniki pomiaru temperatury

pozycja czujnika	cm	0	1.8	3.8	5.6	7.6	9.4	11.4	13.2	15.2	17	19	20.8	22.8
seria 1	°C	13	12	9.6	8.1	7.3	6.9	6.3	5.6	6	5.8	5.6	5.8	5.5
seria 2		12.8	11.6	10	8	7.3	6.9	6.2	5.6	5.9	5.8	5.7	5.8	5.6
seria 3		12.8	11.6	9.9	7.9	7.2	6.8	6.1	5.5	5.9	5.7	5.6	5.7	5.5
seria 4		12.9	11.7	10	7.9	7.1	6.9	6.1	5.6	5.9	5.8	5.6	5.7	5.5
seria 5		12.9	11.8	10	8	7.2	6.9	6.1	5.6	5.8	5.8	5.6	5.7	5.5
średnia		12.9	11.7	9.9	8.0	7.2	6.9	6.2	5.6	5.9	5.8	5.6	5.7	5.5
odchylenie standardowe		0.08	0.17	0.17	0.08	0.08	0.04	0.09	0.04	0.07	0.04	0.04	0.05	0.04
niepewność standardowa typu A		0.05	0.10	0.10	0.05	0.05	0.03	0.05	0.03	0.04	0.03	0.03	0.03	0.03
niepewność standardowa typu B		0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29
złożona niepewność standardowa u_c		0.29	0.30	0.31	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29	0.29

Dane zestawione w tabeli 2 świadczą o dobrej powtarzalności pomiarów.

Metodyka podejścia teoretycznego. Bezpośrednie zastosowanie liniowej teorii przewodnictwa ciepła Fouriera do wyznaczania rozkładu pola temperatury w wielowarstwowym kompozycie stwarza problemy obliczeniowe, ponieważ w równaniu różniczkowym cząstkowym przewodnictwa ciepła występują nieciągłe, silnie oscylujące współczynniki, a konieczność spełnienia warunków ciągłości dla temperatury i strumienia ciepła na styku sąsiadujących ze sobą składników prowadzi do dużej liczby warunków brzegowych. Z tego względu rozkład temperatury wyznaczono w ramach metody modelowania tolerancyjnego.

Proces modelowania tolerancyjnego opiera się na pojęciach i założeniach opisanych np. w [2], [3]. Definicje pojęcia operatora uśrednienia, funkcji wolnozmiennnej (SV) oraz tolerancyjnego uśredniania zostaną poniżej przytoczone za tymi pozycjami literatury.

Uśrednieniem funkcji $f \in L^2((0, L_1))$ nazywa się:

$$\langle f \rangle(x_1) \equiv \frac{1}{l} \int_{x_1-l/2}^{x_1+l/2} f(z) dz, \quad x \in \left(\frac{l}{2}, L_1 - \frac{l}{2} \right). \quad (2)$$

Gdy Π będzie dowolnym obszarem w R^m i $f \in C^1(\Pi)$, natomiast trójka dodatnich liczb $d \equiv (l, \delta_0, \delta_1)$ będzie trójką dodatnich parametrów tolerancji, wówczas funkcję $f \in C^1(\Pi)$ nazywa się wolnozmienną względem parametru

$$d \text{ (tzn. } f \in SV_d^1(\Pi)) \Leftrightarrow (\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Pi^2 \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq l \Rightarrow (|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq \delta_0 \\ \wedge |\partial_j f(\mathbf{x}) - \partial_j f(\mathbf{y})| \leq \delta_1) \wedge (\forall \mathbf{x} \in \Pi \quad |\partial_j f(\mathbf{x})| \leq \delta_0), \forall j = 1, \dots, m).$$

Dla dowolnych dwóch funkcji $f \in L^2\left(x_1 - \frac{l}{2}, x_1 + \frac{l}{2}\right)$ i $F \in SV_d^1((0, L_1))$, gdzie $x_1 \in [0, L_1]$ przyjmuje się, że uśrednienie tolerancyjne iloczynu $F(\cdot)f(\cdot)$ i $\partial_1 F(\cdot)f(\cdot)$ jest odpowiednio w postaci $\langle fF \rangle_T(x_1) = \langle f \rangle(x_1)F(x_1)$ i $\langle f\partial_1 F \rangle_T(x_1) = \langle f \rangle(x_1)\partial_1 F(x_1)$.

W pracy wybrano wariant asymptotyczny modelowania tolerancyjnego cechujący się największą prostotą równań spośród wszystkich modeli tolerancyjnych (por. [4], [5], [7], [8]). Dla dwuwymiarowego stacjonarnego zagadnienia przewodnictwa ciepła w dwuskładniowej warstwowej periodycznej strukturze rozkład temperatury wyznacza się w ramach tego modelu ze wzoru (3), [2,3]:

$$\theta(x_1, x_2) \approx \tilde{\theta}(x_1, x_2) = \vartheta(x_1, x_2) + h(x_1)\psi(x_1, x_2) \quad (3)$$

po rozwiązaniu układu sprzężonych równań (4) [2, 3]:

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle \vartheta_{,11} + \langle \lambda \rangle \vartheta_{,22} + \langle \lambda h_{,1} \rangle \psi_{,1} &= 0 \\ \langle \lambda (h_{,1})^2 \rangle \psi + \langle \lambda h_{,1} \rangle \vartheta_{,1} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Nieznane pola ϑ i ψ nazywa się uśrednioną temperaturą i amplitudą fluktuacji temperatury. Rozwiązania na ϑ i ψ mają sens fizyczny tylko wtedy, gdy spełnione są warunki $\vartheta, \psi \in SV(0, L_1)$. Warunki te należy sprawdzić *a posteriori*, czyli wtedy, gdy funkcje te są już znane.

W przedstawionym modelu muszą być sformułowane warunki brzegowe na uśrednioną temperaturę ϑ . Występująca we wzorach (3) i (4) funkcja $h(\cdot)$ jest daną z góry znaną fluktuacyjną funkcją kształtu, która spełnia warunek $h(0) = h(L_1) = 0$. Jest ona przedziałami liniową funkcją argumentu x , przyjmującą naprzemiennie wartości $\frac{l}{2}$ i $-\frac{l}{2}$ na styku warstw.

Wyznaczając z drugiego równania układu (4) funkcję ψ

$$\psi = -\langle \lambda h_{,1} \rangle \vartheta_{,1} \langle \lambda (h_{,1})^2 \rangle^{-1} \quad (5)$$

i podstawiając do pierwszego równania układu (4) otrzymuje się równanie na funkcję ϑ :

$$\lambda_{eff} \vartheta_{,11} + \langle \lambda \rangle \vartheta_{,22} = 0 \quad (6)$$

gdzie $\lambda_{eff} = \langle \lambda \rangle - \frac{(\langle \lambda h_{,1} \rangle)^2}{\langle \lambda (h_{,1})^2 \rangle} = \frac{\lambda_s \lambda_{OSB} l}{\lambda_s \cdot l_{OSB} + \lambda_{OSB} \cdot l_s}$, $\langle \lambda \rangle = \lambda_s \frac{l_s}{l} + \lambda_{OSB} \frac{l_{OSB}}{l}$.

Równanie (6) z dekompozycją pola temperatury (3) wraz z warunkami brzegowymi reprezentują wariant asymptotyczny modelowania tolerancyjnego, opisujący dwuwymiarowe przewodnictwo ciepła w analizowanej strukturze. W pracy rozwiązanie równania (6) wyznaczono przy użyciu metody różnic skończonych w programie Mathematica, przyjmując warunki brzegowe na uśrednioną temperaturę jak w badaniach doświadczalnych tj. $\vartheta(0, x_2, x_3) = 13^\circ\text{C}$, $\vartheta(22.8, x_2, x_3) = \vartheta(x_1, 0, x_3) = \vartheta(x_1, 24, x_3) = \vartheta(x_1, x_2, 0) = \vartheta(x_1, x_2, 24) = 5.5^\circ\text{C}$

Porównanie wyników teoretycznych i doświadczalnych. Porównanie wyników z pomiarów temperatury na interfejsach struktury materiałowej (tab. 2) z rozkładem temperatury wyznaczonym w modelu tolerancyjnym przedstawiono na rysunku 1. W tabeli 3 przedstawiono porównanie wartości temperatury uśrednionej otrzymanej w ramach rozpatrywanego modelu z wartościami średnimi z badań doświadczalnych. Różnica pomiędzy wynikami wynosi średnio 0.5°C . Największa różnica 1.1°C występuje dla $x=5.6$ cm. Średni błąd względny wynosi 6.8% .

Rys. 1. Porównanie wyników z pomiarów temperatury na interfejsach struktury materiałowej z rozkładem temperatury wyznaczonym w modelu tolerancyjnym dla $x_2=8\text{cm}$, $x_3=12\text{cm}$

Tab. 3.

Błąd bezwzględny i względny pomiaru temperatury

pozycja czujnika	cm	0	1.8	3.8	5.6	7.6	9.4	11.4	13.2	15.2	17	19	20.8	22.8
średnia z badań	°C	12.9	11.7	9.9	8.0	7.2	6.9	6.2	5.6	5.9	5.8	5.6	5.7	5.5
model		13	11.6	10.2	9.1	8.2	7.6	7	6.6	6.3	6.1	5.8	5.7	5.5
błąd bezwzględny		0.1	0.1	0.3	1.1	1	0.7	0.8	1	0.4	0.3	0.2	0	0
błąd względny	%	0.8	0.9	3.0	13.8	13.9	10.1	12.9	17.9	6.8	5.2	3.6	0.0	0.0
średni błąd względny		6.8												

Wnioski. Przeprowadzone badania potwierdzają poprawność modelu tolerancyjnego (wariantu asymptotycznego) dla przewodnictwa ciepła w dwuskładnikowej wielowarstwowej strukturze. Różnica pomiędzy wynikami wynosi średnio 0.5°C, gdzie największa to 1.1°C. Oznacza to, że do celów inżynierskich do wyznaczenia rozkładu temperatury w strukturze wielowarstwowej wariant asymptotyczny modelowania tolerancyjnego jest wystarczający i nie ma potrzeby stosowania bardziej złożonych modeli tolerancyjnych.

1. Woźniak, Cz. i Wierzbicki, E. Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, Tolerance averaging versus homogenization. Częstochowa: Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2000.

2. Woźniak, Cz., Michalak, B. & Jędrzyak, J. (eds): Thermomechanics of Microheterogeneous Solids and Structures. Tolerance Averaging Approach, Łódź: Lodz University Press, 2008.

3. Woźniak, Cz., et. al (eds): Mathematical modelling and analysis in continuum mechanics of microstructured media. Gliwice: Silesian Publ. House, 2010.

4. Pazera, E., & Jędrzyak, J. (2015). Thermoelastic phenomena in transversally graded laminates. Composite Structures, 134, pp. 663-671.

5. Pazera, E., & Jędrzyak, J. (2018, January). Thermomechanical analysis of functionally graded laminates using tolerance approach. In AIP Conference Proceedings (Vol. 1922, No. 1, p. 140001). AIP Publishing.

6. Furmański, P., Wiśniewski, T. S., & Banaszek, J. (2006). Izolacje cieplne: mechanizmy wymiany ciepła, właściwości cieplne i ich pomiary. Instytut Techniki Ciepłej-Politechnika Warszawska.

7. Wozniak, C., Wagrowska, M., & Szlachetka, O. (2015). On the tolerance modelling of heat conduction in functionally graded laminated media. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 56(2), pp. 274-281.

8. Nagórko, W., & Woźniak, C. (2011). Mathematical modelling of heat conduction in certain functionally graded composites. PAMM, 11(1), pp. 253-254.