

ВИКОРИСТАННЯ 3D МЕТОДИКИ ДО РОЗРАХУНКУ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛИНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ БОКОВОГО ТИСКУ

USE OF 3D PROCEDURE FOR CALCULATION OF STRESSED STATE OF LAYERED ANISOTROPIC CYLINDER SHELLS UNDER ACTION OF LATERAL PRESSURE

Трач В.М., д.т.н., проф. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Семенюк М.П., д.т.н., проф.** (Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ, м. Київ), **Подворний А.В., к.т.н., доц.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

Trach V.M., doctor of technical sciences, professor (National university of water management and nature resources use, Rivne) ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Semenuk M.P., doctor of technical sciences, professor** (S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, Kyiv) ORCID ID:0000-0001-5711-4277, **Podvornyi A.V., candidate of technical sciences, associate professor** (National university of water management and nature resources use, Rivne) ORCID ID: 0000-0001-8518-4395

Запропонована методика розв'язку задачі докритичного та критичного напружено-деформованого стану товстих шаруватих циліндричних анізотропних оболонок під дією бокового тиску. Матеріал конструкцій може мати одну площину пружної симетрії, що обумовлюється поворотом головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу відносно твірної оболонки.

Proposed approach allows to solve the problem of stressed state of laminar thick-walled cylindrical anisotropic shells under action of external or internal lateral pressure. Material of structures has one plane of elastic symmetry, which is caused by rotation of main directions of elasticity of initial orthotropic material relative to generatrix of shells. To solve the problem, a system of differential equations is used, describing the stressed state, which is based on three-dimensional relations of elasticity theory. The solution of this system relies on the use of the Bubnov-Galerkin procedure and the numerical method of discrete orthogonal.

The issue of stressed state of three-layer thick-walled cylinder made of material, characteristics of which are described by one planes of elastic symmetry, is solved. Using the three-dimensional approach, studies were carried out to change the parameters of the stressed state in the thickness of

the shell depending on the angle of rotation of the main directions of elasticity of the bearing layers. The results of calculations are presented in the form of graphs, as well as their analysis.

Ключові слова:

Оболонка, напружений стан, анізотропія, розподілений тиск, 3D підхід
Shell, stressed state, anisotropy, the distributed pressure, 3D approach

Вступ. Товсті, неоднорідні за товщиною, оболонки використовуються в якості конструктивних елементів у автомобільній, авіаційно-космічній промисловості та будівництві. Найважливішим параметром оцінки несучої здатності таких конструкцій є їх міцність. Це особливо важливо в умовах застосування сучасних композитних матеріалів, коли постає необхідність поєднання міцності із зменшенням ваги оболонкових елементів. Таким чином виникає актуальна проблема встановлення достовірного напруженого стану товстих оболонкових конструкцій.

Аналіз останніх досліджень. Розв'язанню задач про до критичний та критичний напружений стани композитних оболонок в просторовій постановці присвячені роботи [1-11]. З їх аналізу випливає, що навіть для ізотропних й ортотропних матеріалів розв'язання задач про напружено-деформований стан в тривимірній постановці пов'язане зі значними труднощами. Це обумовлено складністю системи вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних і необхідністю врахування крайових умов на обмежуючих пружне тіло поверхнях. Зазначені проблеми стають більш суттєвими в разі використання в оболонках матеріалу, що має одну площину пружної симетрії. Наявність такого типу анізотропії зумовлює появу взаємозв'язку в розподілі напружень і переміщень, які не мають місця в розрахунках, наприклад, ортотропних оболонок.

Дослідженню подібних ефектів взаємозв'язку присвячена праця [8], де приведені загальні рівняння теорії пружної рівноваги, які встановлюють параметри напруженого стану такого виду анізотропії матеріалу при якому він має одну площину пружної симетрії. Приводиться математичне формулювання задач про напружений стан пружного анізотропного циліндра нескінченної довжини при дії бокового стиснення, осьового стиску, кручення, згину. У дослідженнях [2-4] викладені основні залежності і відповідні методики знаходження параметрів, що описують напружено-деформований стан анізотропних оболонок в просторовій постановці. Аналіз розрахунку оболонкових конструкцій на стійкість з ортотропних матеріалів в тривимірній постановці приведений в роботі [5, 6].

В приведеній роботі представлено підхід до розв'язання задачі напруженого стану товстих циліндричних шаруватих анізотропних оболонок в просторовій постановці на основі співвідношень теорії пружності, представлених в роботі [9]. Розв'язок задачі про напружений стан таких

конструкцій, що знаходяться під дією рівномірного бокового тиску, спирається на використання методів Бубнова-Гальоркіна та дискретної ортогоналізації, що дозволяє отримувати необхідні його характеристики влюбій точці за товщиною й довжиною оболонки. При цьому моделювання матеріалу, з якого виготовляється циліндрична анізотропна оболонка, описується матеріалом з однією площиною пружної симетрії.

Постановка мети і задач досліджень. Розглядається задача про напружений стан неоднорідного за товщиною анізотропного товстого циліндра, матеріал кожного шару якого має одну площину пружної симетрії. На його поверхні та торці можуть бути накладені певні види граничних умов.

В якості вихідних, приймаються співвідношення теорії пружності анізотропного неоднорідного тіла в циліндричній системі координат r, z, θ . Вісі r та θ яких є полярними координатами колового поперечного перерізу, z – нормальна до цього перерізу вісь, початок якої збігається з центром ваги одного з торців оболонки. Матеріал шарів конструкцій має одну площину пружної симетрії, що обумовлено поворотом головних напрямків пружності вихідного ортотропного матеріалу щодо осі z розглядуваної системи координат, рис.1. Геометрія циліндра визначається довжиною його твірної L , а також радіусами внутрішньої r_1 і зовнішньої r_2 поверхонь. Оболонка знаходиться в полі дії розподіленого бокового тиску.

Лінеаризовані рівняння рівноваги, в разі невісесиметричного напруженого стану, для кожного i -го шару запишемо у вигляді [9]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\sigma_{rr}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zr}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r}^i) - \sigma_{\theta\theta}^i + r F_r^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{rz}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{zz}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta z}^i) + r F_z^i \right]; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \left[\tau_{r\theta}^i + \tau_{\theta r}^i + r \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}^i) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{\theta\theta}^i) + r F_\theta^i \right], \end{aligned} \quad (1)$$

де r_i ($i=1,2$) – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; $\sigma_{zz}^i, \sigma_{rr}^i, \sigma_{\theta\theta}^i, \tau_{rz}^i, \tau_{r\theta}^i, \tau_{z\theta}^i$ – компоненти тензора напружень, F_r, F_z, F_θ – проекції вектора питомих об'ємних сил на напрямки дотичних до координатних ліній r, z, θ .

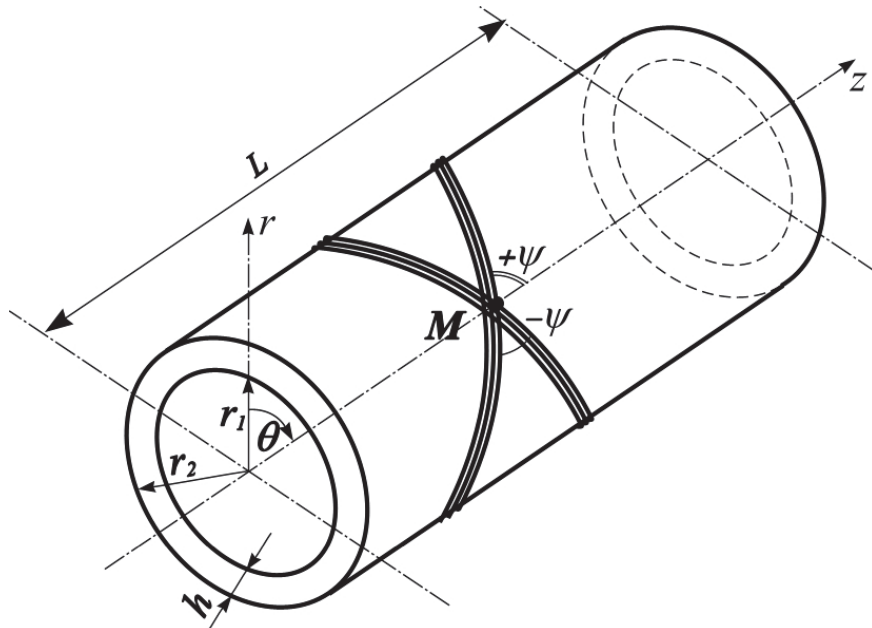


Рис. 1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка.

Зв'язок між складовими деформацій та переміщеннями прийемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & e_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; & e_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \\
 e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; & e_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Тут u_z^i , u_θ^i , u_r^i – переміщення в напрямку осей z , θ , r відповідно; e_{zz}^i , $e_{\theta\theta}^i$, e_{rr}^i – відносні лінійні деформації за напрямками координатних осей z , θ , r ; $e_{z\theta}^i$, e_{rz}^i , $e_{r\theta}^i$ – відносні зсуви за дотичними в розглядуваній точці до відповідних координатних поверхонь.

Співвідношення узагальненого закону Гука, що зв'язують компоненти деформацій і напружень в разі збігу осей ортотропії з координатними такі:

$$\begin{aligned}
 e_{zz}^i &= a_{11}^{i/} \sigma_{zz}^i + a_{12}^{i/} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^{i/} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^{i/} \sigma_{zz}^i + a_{22}^{i/} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^{i/} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{rr}^i &= a_{13}^{i/} \sigma_{zz}^i + a_{23}^{i/} \sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^{i/} \sigma_{rr}^i; \\
 e_{r\theta}^i &= a_{44}^{i/} \tau_{r\theta}^i; & e_{rz}^i &= a_{55}^{i/} \tau_{rz}^i; & e_{z\theta}^i &= a_{66}^{i/} \tau_{z\theta}^i. \quad (3)
 \end{aligned}$$

При повороті осей ортотропії навколо осі z ці залежності набувають вигляду:

$$e_{zz}^i = a_{11}^i \sigma_{zz}^i + a_{12}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{13}^i \sigma_{rr}^i + a_{16}^i \tau_{z\theta}^i;$$

$$\begin{aligned}
e_{\theta\theta}^i &= a_{12}^i \sigma_{zz}^i + a_{22}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{23}^i \sigma_{rr}^i + a_{26}^i \tau_{z\theta}^i; \\
e_{rr}^i &= a_{13}^i \sigma_{zz}^i + a_{23}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{33}^i \sigma_{rr}^i + a_{36}^i \tau_{z\theta}^i; \\
e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{rz}^i = a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \\
e_{z\theta}^i &= a_{16}^i \sigma_{zz}^i + a_{26}^i \sigma_{\theta\theta}^i + a_{36}^i \sigma_{rr}^i + a_{66}^i \tau_{z\theta}^i.
\end{aligned} \tag{4}$$

В (3, 4) $a_{kl}^{i/}$ та a_{kl}^i – механічні константи i -го шару, відповідно, ортотропного та матеріалу з однією площиною пружної симетрії, зв'язок між якими встановлено у [8].

Методика досліджень. Співвідношення узагальненого закону Гука, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії (4), приведемо до виду [3], який використовуємо при розв'язку системи (1):

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i &= b_{11}^i e_{zz}^i + b_{12}^i e_{\theta\theta}^i + b_{16}^i e_{z\theta}^i + c_1^i \sigma_{rr}^i; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= b_{12}^i e_{zz}^i + b_{22}^i e_{\theta\theta}^i + b_{26}^i e_{z\theta}^i + c_2^i \sigma_{rr}^i; \\
\tau_{z\theta}^i &= b_{16}^i e_{zz}^i + b_{26}^i e_{\theta\theta}^i + b_{66}^i e_{z\theta}^i + c_3^i \sigma_{rr}^i; \\
e_{rr}^i &= -c_1^i e_{zz}^i - c_2^i e_{\theta\theta}^i - c_3^i e_{z\theta}^i + c_4^i \sigma_{rr}^i; \\
e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; \quad e_{r\theta}^i = a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i,
\end{aligned} \tag{5}$$

де b_{kl}^i ($k, l = 1, 2, 6$), c_k^i ($k = 1 \div 4$) – характеристики, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i матеріалу оболонки.

Замінюючи в (5) деформації e_{zz}^i , $e_{\theta\theta}^i$, $e_{z\theta}^i$ їх виразами з (2) і підставляючи отримані залежності для σ_{zz}^i , $\sigma_{\theta\theta}^i$, $\tau_{z\theta}^i$ в (1), а для e_{rz}^i , $e_{r\theta}^i$, e_{rr}^i в (2) отримаємо для кожного i -го шару повну систему диференціальних рівнянь в частинних похідних:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= \frac{c_2 - 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{b_{22}}{r^2} u_r^i + \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \\
&+ \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= -c_1 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{b_{12}}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{11} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{b_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} - \\
&- \frac{c_3}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2b_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - b_{16} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2}, \\
\frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= -\frac{c_2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{b_{12} + b_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - b_{66} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \frac{b_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} - \\
&- c_3 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{b_{26}}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - b_{16} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{b_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \frac{2b_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta}, \\
\frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_4 \sigma_{rr}^i - \frac{c_2}{r} u_r^i - c_1 \frac{\partial u_z^i}{\partial z} - \frac{c_3}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} - \frac{c_2}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55} \tau_{rz}^i + a_{45} \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} = a_{45} \tau_{rz}^i + a_{44} \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i. \quad (6)
\end{aligned}$$

Розв'язок системи (6) має відповідати умовам на бічних поверхнях при $r = r_1, r = r_2$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^1(r_1, z) &= \pm q_r^1(z); & \tau_{rz}^1(r_1, z) &= 0; & \tau_{r\theta}^1(r_1, z) &= 0; \\
\sigma_{rr}^2(r_2, z) &= \pm q_r^2(z); & \tau_{rz}^2(r_2, z) &= 0; & \tau_{r\theta}^2(r_2, z) &= 0, \quad (7)
\end{aligned}$$

умовам на торцях $z = 0, z = L$

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0 \quad (8)$$

і умовам жорсткого контакту шарів:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\
u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i). \quad (9)
\end{aligned}$$

Умови (8) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині і гнучкої з неї. В (7) $q_r^1(z), q_r^2(z)$ – розподілений по бокових поверхнях оболонки внутрішній і зовнішній тиск відповідно.

Для розв'язку тривимірної задачі (6) та (7, 9) скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди за координатою вздовж твірної циліндра z так, що б вони задовольняли крайовим умовам (8), а також врахуємо періодичності функцій за коловою координатою θ :

$$\sigma_{rr}^i(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{1, mk}^{i'}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z;$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{2, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{2, mk}^{i'}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z ; \\
\tau_{r\theta}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{3, pk}^i(r) \sin k\theta + y_{3, mk}^{i'}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z ; \\
u_r^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{4, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{4, mk}^{i'}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z ; \\
u_z^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{5, pk}^i(r) \cos k\theta + y_{5, mk}^{i'}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z ; \\
u_{\theta}^i(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{6, pk}^i(r) \sin k\theta + y_{6, mk}^{i'}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z , \quad (10)
\end{aligned}$$

де $y_{i, pk}, y_{i, mk}^{i'}$ ($i = \overline{1, 6}$) – компоненти розкладання в тригонометричні ряди Фур'є складових напружено-деформованого стану оболонки, p, m – хвильові числа в рядах.

Після деяких математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (6) за допомогою співвідношень (10), отримаємо для кожного i -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r) \bar{y}^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = 1 \div 12), \quad (11)$$

де $\bar{y}^i = \left\{ y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i'}; y_{2,m}^{i'}; y_{3,m}^{i'}; y_{4,m}^{i'}; y_{5,m}^{i'}; y_{6,m}^{i'} \right\}$ – розв'язуюча вектор-функція. Ненульові елементи якої записуються відповідно до [11], $t_{n,l}^i(r)$ - коефіцієнти при невідомих системи (6).

Реалізація отриманої одновимірної задачі про напружений стан товстого циліндра описується системи рівнянь стійкості (11) при граничних умовах (7) проводиться при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [4]. Після розв'язку системи (11), для переходу від отриманих функцій до додаткових компонентів напружено-деформованого стану використовуємо співвідношення (10).

Результати чисельних розрахунків та їх аналіз. Алгоритм розв'язку задачі про напружений стан товстих анізотропних циліндричних оболонок, які знаходяться під дією розподілених по боковій поверхні навантажень,

реалізований у вигляді пакетів прикладних програм для персонального комп'ютера.

При тестуванні результатів розв'язання задачі про напружений стан товстих циліндрів під розподіленим бічним тиском, отримані значення напружень порівнювалися з такими, що приведені в [3].

Розглядався напружений стан ортотропної оболонки навантаженої на зовнішній поверхні розподіленим тиском $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L} z$. Розрахунки виконані для геометричних параметрів: $r_1=0.09\text{м}$, $r_2=0.11\text{м}$, $L=0.1\text{м}$; при таких значеннях механічних характеристик матеріалу: $E_z=1.9 E_0$, $E_\theta=1.2 E_0$, $E_r=0.45 E_0$, $G_{z\theta}=0.3 E_0$, $G_{r\theta}=0.23 E_0$, $G_{rz}=0.23 E_0$, $\nu_{z\theta}=0.15$, $\nu_{r\theta}=0.3$, $\nu_{rz}=0.07$, $E_0=1000\text{МПа}$.

У таблиці 1 приведено порівняння отриманих відповідно до запропонованої моделі величин напружень з представленими в [3], всі значення яких віднесені до навантаження q_0 . Співставлення результатів розрахунків свідчить про задовільну збіжність вирахованих параметрів напруженого стану ортотропного циліндра, знайдених за запропонованою методикою, і підходом, що приведений в [3]. Максимальна розбіжність між величинами напружень σ_{zz} , отриманими за двома підходами, не перевищує 8%, між $\sigma_{\theta\theta}$ – не більше 2,5% та між значеннями σ_{rr} – не більше 0,3%.

Таблиця 1.

Порівняння результатів визначення напруженого стану зі значеннями [3]

$\frac{r-r_1}{r_2-r_1}$	σ_{zz}/q_0		$\sigma_{\theta\theta}/q_0$		σ_{rr}/q_0	
	[3]	Пропонована методика	[3]	Пропонована методика	[3]	Пропонована методика
0	4.89	5.02	-0.355	-0.353	0	0
0.2	2.71	2.83	-0.374	-0.370	-0.187	-0.187
0.4	0.94	1.02	-0.393	-0.386	-0.407	-0.408
0.6	-0.7	-0.69	-0.414	-0.404	-0.632	-0.634
0.8	-2.42	-2.53	-0.437	-0.426	-0.838	-0.839
1.	-4.44	-4.77	-0.463	-0.455	-1	-1

В якості реалізації запропонованого підходу розглянемо тришаровий циліндр під дією розподіленого зовнішнього тиску $q = -q_0 \sin \frac{\pi}{L} z$, у якого

зі склопластику $E_{11}=445 \cdot 10^2 \text{МПа}$ виготовлені лише несучі зовнішній і внутрішній шари, а в якості заповнювача використовується ізотропний

матеріал з $E = 0.1E_{11}$. Довжина оболонки $L=2.4$ м, радіуси внутрішньої $r_1 = 0,55$ м і зовнішньої $r_2 = 0.65$ м поверхонь. Головні напрямки пружності несучих шарів товщиною $h_1 = h_3 = 0,01$ м кожен повернуті на кут ψ . У таблиці 2 і на рис. 2 представлено випадок повороту головних напрямків несучих шарів на кут $\psi = 60^\circ$. На рис 2 введені такі позначення: крива 1 відповідає напруженню σ_{zz} , 2 – $\sigma_{\theta\theta} \cdot 10^{-1}$, 3 – σ_{rr} , 4 – $\tau_{z\theta}$, 5 – $\tau_{rz} \cdot 10^1$, 6 – $\tau_{r\theta} \cdot 10^1$.

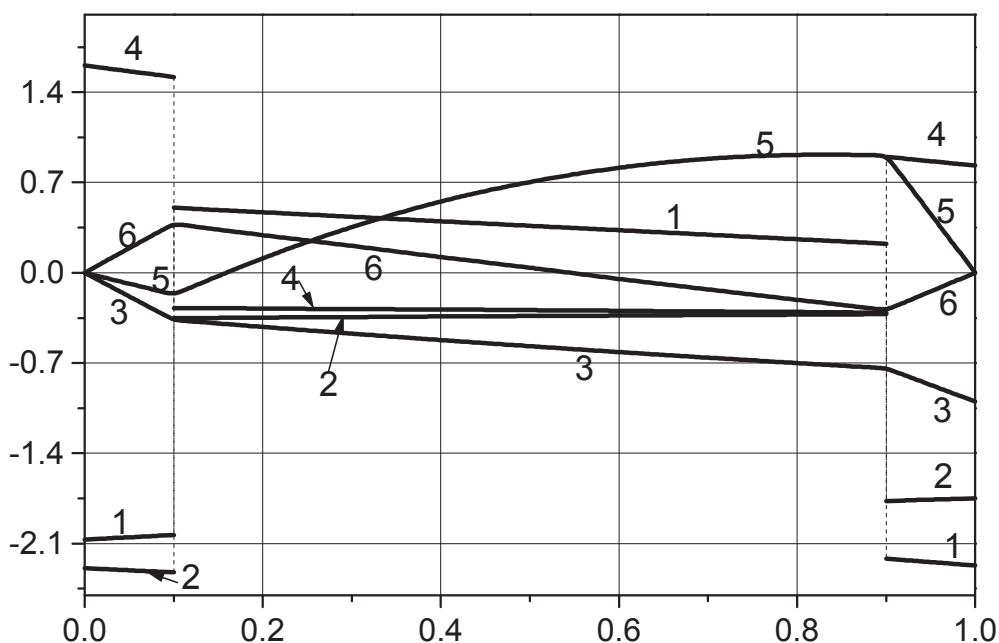
Таблиця 2.

Напруження в тришаровому циліндрі з несучими шарами, поверненими на кут $\psi_1 = \psi_3 = 60^\circ$

$\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$	σ_{zz} / q_0	$\sigma_{\theta\theta} / q_0$	σ_{rr} / q_0	$\tau_{z\theta} / q_0$	τ_{rz} / q_0	$\tau_{r\theta} / q_0$
0.0	-2.291	-20.689	0.0	1.607	0.0	0.0
0.1	-2.323	-20.341	-0.366	1.518	-0.017	0.038
0.1	0.504	-3.518	-0.366	-0.273	-0.017	0.038
0.2	0.469	-3.473	-0.421	-0.277	0.012	0.029
0.3	0.434	-3.431	-0.473	-0.281	0.036	0.021
0.4	0.399	-3.391	-0.523	-0.286	0.056	0.012
0.5	0.364	-3.354	-0.570	-0.290	0.071	0.004
0.6	0.330	-3.319	-0.616	-0.295	0.082	-0.005
0.7	0.295	-3.286	-0.659	-0.300	0.089	-0.013
0.8	0.260	-3.254	-0.701	-0.305	0.092	-0.021
0.9	0.225	-3.225	-0.741	-0.310	0.091	-0.029

Характерною особливістю представлених в таблиці 2 і на рис. 2 результатів є значна різниця між величинами компонентів напруженого стану σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{z\theta}$ в несучих шарах і в заповнювачі, яка сягає одного порядку. Причому для напружень σ_{zz} , $\tau_{z\theta}$ спостерігається зміна знаку при переході від одного шару до іншого, а напруження τ_{rz} та $\tau_{r\theta}$ змінюють знаки своїх величин за товщиною оболонки.

$$\frac{\sigma}{q_0}$$



$$\frac{r - r_1}{r_2 - r_1}$$

Рис. 2. Розподіл напружень за товщиною тришарового циліндра при повороті головних напрямків пружності несучих шарів на кут $\psi=60^\circ$.

Висновок. 1. Запропоновано удосконалений підхід щодо розв'язку задачі про напружений стан товстих циліндричних анізотропних оболонок в тривимірній постановці, що спирається на метод Бубнова-Гальоркіна і який дозволяє привести її до одновимірної. Чисельна реалізація останньої проводиться при використанні методу дискретної ортогоналізації. Порівняння отриманих результатів за запропонованою методикою з наведеними в літературі [3], вказує на задовільну збіжність результатів параметрів напруженого стану ортотропного товстого циліндра й дозволяє стверджувати про достовірність отримуваних параметрів напруженого стану товстої анізотропної циліндричної оболонки.

2. Як витікає проведених розрахунків напруженого стану товстого тришарового циліндра та з рис. 2, запропонований авторами підхід дозволяє реалізовувати в тривимірній постановці задачі про напружено-деформований стан неоднорідних у радіальному напрямку циліндрів, з матеріалів з однією площиною пружної симетрії, при дії розподілених бокових навантажень, в широкому діапазоні зміни геометричних і механічних характеристик шарів пакету.

1. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1978. – 462с.

Aleksandrov A.YA., Solov'yev YU.I. Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti. - M.: Nauka, 1978. - 462s.

2. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel - K.: Nauk. dumka, 1991. - 216 s.

3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек – К.: Вища школа. Головное изд-во, 1985. – 190 с.

Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Statika anizotropnykh tolstostennykh obolochek - M.: Vysshaya shkola. Golovnoye izd-vo, 1985. - 190 s.

4. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472с.

Grigorenko YA.M., Vlaykov G.G., Grigorenko A.YA. Chislenno-analiticheskoye resheniye zadach mekhaniki obolochek na osnove razlichnykh modeley. - Kiyev: Akadempriodika, 2006. - 472s.

5. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища школа, 1986. – 511 с.

Guz' A.N. Osnovy trekhmernoy teorii ustoychivosti deformiruyemykh tel. - Kiyev: Vysshaya shkola, 1986. - 511 s.

6. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1980. – 168 с.

Guz' A.N., Babich I.YU. Trekhmernaya teoriya ustoychivosti sterzhney, plastin i obolochek. - Kiyev: Vysshaya shkola, 1980. - 168 s.

7. Колтунов М.А., Васильев Ю.Н., Пасько Д.А. Прочность полых цилиндров. – М.: Машиностроение, 1981. – 264 с.

Koltunov M. A., Vasil'yev YU.N., Pas'ko D.A. Prochnost' polykh tsilindrov. - M.: Mashinostroyeniye, 1981. - 264 s.

8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Lekhnitskiy S. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. - 2 izd., ispr. i dop. - M.: Nauka, 1977. - 415 s.

9. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.

Novozhilov V.V. Teoriya uprugosti. - L.: Sudpromgiz, 1958. - 370 s.

10. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек. — Л.: Политехника, 1991.

Novozhilov V. V., Chernykh K. F., Mikhaylovskiy Ye. I. Lineynaya teoriya tonkikh obolochek. - L.: Politekhnik, 1991.

11. Подворный А.В., Семенюк Н.П., Трач В.М. Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек при распределенном внешнем давлении в пространственной постановке. // Прикладная механика. – 2017. – т.53 (63). – №6. – с.23–39.

Podvornyyu A.V., Semenyuk N. P., Trach V.M. Ustoychivost' neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek pri raspredelennykh vneshnem davlenii v prostranstvennoy postanovke. // 39.– s.23– №6. – t.53 (63). – 2017. – Prikladnaya mekhanika.