

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КІЛЬЦЕВОГО ПЕРЕРІЗУ
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**STRESS-STRAIN STATE OF ANNULUS SECTION OF REINFORCED
CONCRETE ELEMENTS**

**Чеканович М. Г., к.т.н., проф., ORSID ID 0000-0002-9110-4109, (ДВНЗ
«Херсонський державний аграрний університет», м. Херсон)**

**Chekanovych M.G. candidate of technical sciences, professor, (Kherson State
Agrarian University, Kherson)**

Стаття присвячена аналітичному визначенню параметрів напружень та деформацій залізобетонних елементів кільцевого перерізу, серед яких колони, стояки опор, труби, палі. Точне вирішення рівнянь напружено-деформованого стану поперечних перерізів конструкцій в межах передумов виконано на основі рекурентної формули для інтегралу від диференційного біному.

The paper is devoted to the analytical determination of stress and deformation parameters of reinforced concrete elements of annulus section, including columns, risers, supports, pipes, piles. The exact solution of stress-strain state equations for cross-sections of structures within initial data is performed on the basis of recurrence formula for the integral of differential binominal.

To date, there is a fairly wide range of approximate theoretical solutions for complex engineering problems in the design of buildings and structures. In the practice of construction there are spread out elements of round and annulus sections, among which are columns, support risers, pipes and many other structures. The exact solution to the problem of their calculation presents scientific value, movement to the knowledge and can serve as a benchmark for comparison.

The aim of the study is to obtain the analytical solution of integral dependencies for determining the stress-strain state of annulus cross-section of elements made of reinforced anisotropic material by the example of reinforced concrete.

The calculation of the bearing capacity of normal cross sections of structures made of reinforced anisotropic material involves finding the relationship between load and deformation. At the same time, the maximum on the dependence curve of the "load-curvature" corresponds to the magnitude of the bearing capacity of the structures.

For the analytical determination of the bearing capacity of columns, risers, pipes, piles of round or annulus cross-sections, the equations of the stress-strain state provided in the paper can be used. The solution of two equilibrium equations of the sections for three unknowns, for example, the normal force and deformations on the extreme fibers of the cross section, is possible through selection and verification.

The paper presents analytical dependences obtained for the determination of the stress-strain state of reinforced anisotropic elements of annulus cross-section by the example of reinforced concrete in a possible range of changes in the properties of concrete and steel for any stage of structural load.

Ключові слова: кільцевий переріз, напружено-деформований стан, рекурентна формула, інтеграл, диференційний біном.

Вступ. Будівлі та споруди початку третього тисячоліття характеризується широким використанням залізобетону. Домінуюче положення цементного бетону в будівництві пояснюється наявністю практично необмежених сировинних матеріалів у земній корі, відносно низькою їх вартістю, добрими фізико-механічними властивостями бетону. Ефективна діяльність науковців і практиків по вдосконаленню бетонів, конструкцій сприяє поліпшенню їх фізико-механічних властивостей, забезпечує їм чільне місце в будівництві [1-7]. Кінцевим результатом низки удосконалень є раціональне застосування бетону в елементах і конструкціях будов. Поєднання позитивних якостей бетону й арматурної сталі в залізобетонних елементах забезпечило їм провідне місце в несучих будівельних конструкціях [6-9].

Постановка проблеми. На сьогодні існує доволі широкий спектр наближених теоретичних вирішень для складних інженерних задач розрахунку будівель та споруд [6-11]. В практиці будівництва досить поширені елементи кільцевого перерізу, серед яких колони, стояки опор, труби та багато інших конструкцій [4,5,7,11]. Точне вирішення проблеми їх розрахунку представляє наукову цінність, рух до пізнання та може слугувати еталоном для порівняння.

Метою роботи. Метою роботи є отримання аналітичного вирішення інтегральних залежностей для визначення напружено-деформованого стану кільцевого перерізу елементів із залізобетону.

Теоретичні дослідження. Для розрахунку напружено-деформованого стану елементів із залізобетону, доцільно використовувати криволінійну діаграму « σ - ϵ » бетону [4,6,8-11]. Розглянемо аналітичне вирішення рівнянь напружено-деформованого стану нормальних перерізів залізобетонних елементів в межах передумов «еквівалентного» перерізу [8,9].

Враховуючи вищезазначене, рівняння напружено-деформованого стану залізобетонних елементів кільцевого перерізу (див. рис. 1) можна представити формулами:

$$\begin{aligned}
N = & 2 \left[\sum a_k \left(\int_0^{h_c} \sqrt{2Rh - h^2} (\varepsilon_1 - \chi h)^k dh - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{R-r}^{h_c - R + r} \sqrt{2r(h - R + r) - (h - R + r)^2} (\varepsilon_1 - \chi h)^k dh \right) - \psi_{ct} f_{ct} \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(\int_{h_c}^{2R} \sqrt{2Rh - h^2} dh - \int_{h_c - R + r}^{R + r} \sqrt{2r(h - R + r) - (h - R + r)^2} dh \right) \right] + \sum \sigma_{si} A_{si} \quad (1)
\end{aligned}$$

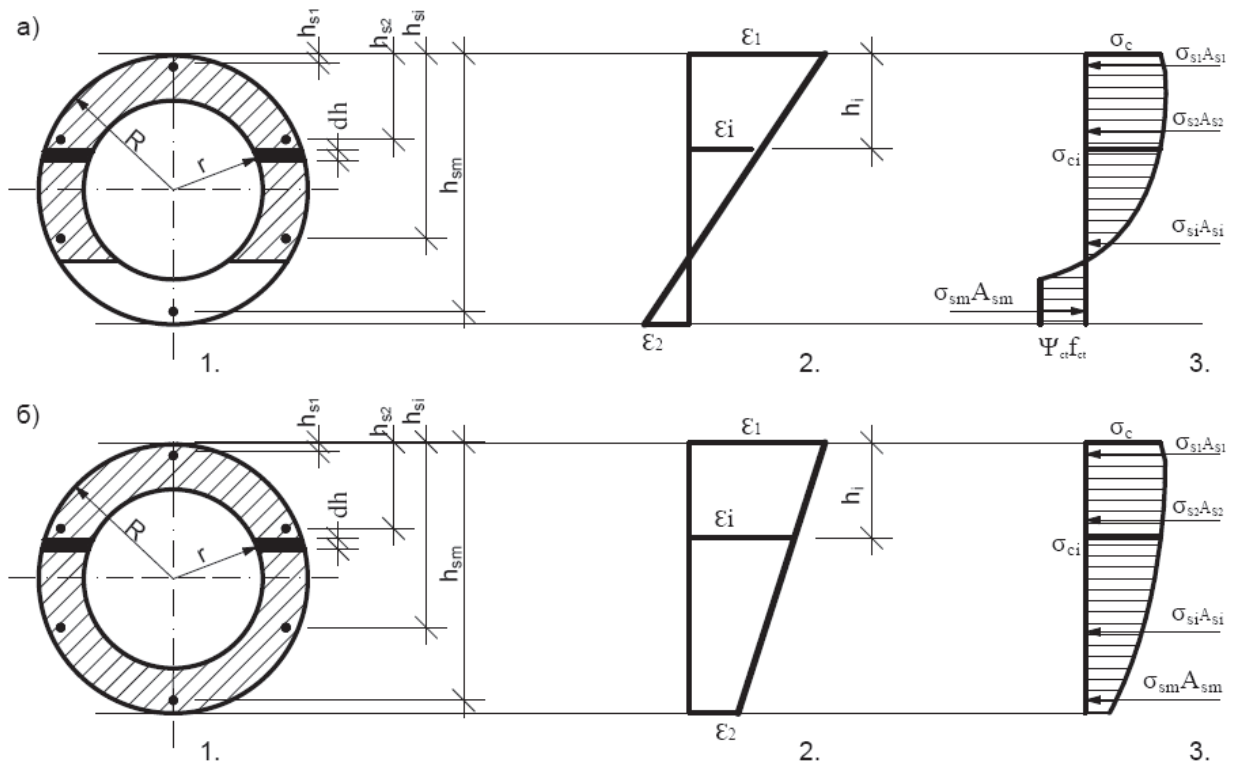


Рис. 1. Напружено-деформований стан кільцевого перерізу;
 а - для першої форми рівноваги; б - для другої форми рівноваги;
 1 - поперечний переріз; 2 - епюра деформацій; 3 - епюра напружень

$$\begin{aligned}
M = & 2 \left[\sum a_k \left(\int_0^{h_c} h \sqrt{2Rh - h^2} (\varepsilon_1 - \chi h)^k dh - \right. \right. \\
& \left. \left. - \int_{R-r}^{h_c - R + r} \sqrt{2r(h - R + r) - (h - R + r)^2} (\varepsilon_1 - \chi h)^k dh \right) - \psi_{ct} f_{ct} \cdot \right. \\
& \left. \cdot \left(\int_{h_c}^{2R} \sqrt{2Rh - h^2} dh - \int_{h_c - R + r}^{R + r} \sqrt{2r(h - R + r) - (h - R + r)^2} dh \right) \right] + \sum \sigma_{si} A_{si} h_{si}, \quad (2)
\end{aligned}$$

де: $2\sqrt{2Rh - h^2}$ - довжина хорди кола радіусом R ;
 $2\sqrt{2r(h - R + r) - (h - R + r)^2}$ - те саме, радіусом r ;

$\varepsilon_1 - \chi h$ - величини відносних деформацій, що відповідають кожному прийнятому значенню h в межах від нуля до $2R$; тут χ - кривина.

Наведені рівняння (1) і (2) описують як першу, так і другу форми рівноваги залізобетонних конструкцій кільцевого поперечного перерізу. Різниця між ними враховується підстановкою відповідних меж інтегрування.

Якщо зазначити інтеграли

$$I_k = \int h^k \sqrt{2Rh - h^2} dh$$

і

$$J_k = \int h^k \sqrt{2r(h - R + r) - (h - R + r)^2} dh,$$

то рівняння (1) і (2) матимуть вигляд:

$$N = 2[\sum N_k - N_{ct}] + \sum \sigma_{si} A_{si}; \quad (3)$$

$$M = 2[\sum M_k - M_{ct}] + \sum \sigma_{si} A_{si} h_{si} \quad (4)$$

де:

$$N_1 = a_1 [\varepsilon_1 (I_0 - J_0) - \chi (I_1 - J_1)]$$

$$N_2 = a_2 [\varepsilon_1^2 (I_0 - J_0) - 2\chi\varepsilon_1^2 (I_1 - J_1) + \chi^2 (I_2 - J_2)];$$

$$N_3 = a_3 [\varepsilon_1^3 (I_0 - J_0) - 3\chi\varepsilon_1^2 (I_1 - J_1) + 3\chi\varepsilon_1 (I_2 - J_2) - \chi^3 (I_3 - J_3)];$$

$$N_{ct} = \psi_{ct} f_{ct} (I_0^{ct} - J_0^{ct});$$

$$M_1 = a_1 [\varepsilon_1 (I_1 - J_1) - \chi (I_2 - J_2)];$$

$$M_2 = a_2 [\varepsilon_1^2 (I_1 - J_1) - 2\chi\varepsilon_1^2 (I_2 - J_2) + \chi^2 (I_3 - J_3)];$$

$$M_3 = a_3 [\varepsilon_1^3 (I_1 - J_1) - 3\chi\varepsilon_1^2 (I_2 - J_2) + 3\chi\varepsilon_1 (I_3 - J_3) - \chi^3 (I_4 - J_4)];$$

$$M_{ct} = \psi_{ct} f_{ct} (I_1^{ct} - J_2^{ct});$$

Тут

$$J_1 = L_1 + (R - r)L_0;$$

$$J_2 = L_2 + 2(R - r)L_1 + (R - r)^2 L_0;$$

$$J_3 = L_3 + 3(R - r)L_2 + 3(R - r)^2 L_1 + (R - r)^3 L_0$$

Вирази для N_4, N_5, M_4, M_5 та J_4, J_5, J_6 мають аналогічну структуру і умовно не наведені через громіздкість запису.

Для k від 1 до 5 одержане аналітичне вирішення інтегралів I_k та J_k на основі рекурентної формули для інтегралу від диференційного бінома

$$I_k = -2(2R)^{k+2} (I'_{k-1} - I'_k), \quad (5)$$

де

$$I'_k = \frac{h^{k+1} \sqrt{2(R-h)h}}{2(k+2) \cdot (2R)^{k+2}} + \frac{2k+3}{2k+4} I'_{k-1} \quad (6)$$

$$I'_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{h-R}{R^2} \sqrt{2Rh-h^2} + R^2 \arcsin \frac{h-R}{R} \right) + \frac{h\sqrt{(2R-h)h}}{4R^2} \quad (7)$$

Відповідно:

$$L_k = -2(2r)^{k+2} (L'_{k-1} - L'_k), \quad (8)$$

де

$$L'_k = \frac{(h-R+r)^{k+1} \sqrt{Rh-h^2-R^2}}{2(k+2) \cdot (2r)^{k+2}} + \frac{2k+3}{2k+4} L'_{k-1} \quad (9)$$

$$L'_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{h-R}{r^2} \sqrt{2r(h-R+r) - (h-R+r)^2} + \arcsin \frac{h-r}{r} \right) + \frac{(h-R+r) \sqrt{Rh-h^2-R^2}}{4r^2} \quad (10)$$

Таким чином, одержані всі необхідні вирішення для розрахунку рівнянь напружено-деформованого стану елементів кільцевого поперечного перерізу, виконаних з армованого бетону. Слід підкреслити, що значення коефіцієнтів a_k приймаються у формулах за даними апроксимації експериментальної повної діаграми « σ - ε » бетону, або за рекомендаціями [8-11].

Підставивши у вирази (11), (14) відповідні межі інтегрування для стисненої зони перерізу, матимемо:

$$I'_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{h_c - R}{R^2} \sqrt{2Rh_c - h_c^2} + R^2 \arcsin \frac{h_c - R}{R} \right) + \frac{h_c \sqrt{(2R - h_c) h_c}}{4R^2} - \frac{3}{32} \pi$$

(11)

$$L'_0 = -\frac{3}{16} \left(\frac{h_c - 2R + r}{r^2} \sqrt{2r(h_c - 2(R+r)) - (h_c - 2(R+r))^2} + r^2 \arcsin \frac{h_c - 2R - r}{r} \right) + \frac{(h_c - 2R - r) \sqrt{R(h_c - R + r) - (h_c - R + r)^2 - R^2}}{4r^2} - \frac{3}{32} \pi \quad (12)$$

Остаточно значення інтегральних виразів підраховуються відповідно за формулами (9), (10), (12), (13).

Підставляючи знайдені значення I_k і J_k у рівняння (7) і (8), одержимо за відомими деформаціями ε_l і кривиною χ відповідні величини нормальної

сили та згинального моменту у кільцевому перерізі конструкції, яка може мати тріщини у розтягненій зоні бетону.

Розрахунок несучої здатності нормальних перерізів конструкцій з залізобетону передбачає знаходження залежності між навантаженням і деформаціями. При цьому максимум на кривій залежності «навантаження-кривина» відповідає величині несучої здатності конструкцій.

Для аналітичного знаходження несучої здатності колон, стояків, труб, палів кільцевого поперечного перерізу можна скористатися наведеними рівняннями напружено-деформованого стану. Рішення двох рівнянь рівноваги перерізу при трьох невідомих, наприклад, нормальної сили N і деформацій на крайніх фібрах перерізу ε_l можливо шляхом добору і перевірки. Для цього приймаються фіксовані значення ε_1 і добирається величина ε_2 , яка задовольняє при заданій точності умову $N \cdot e = M$. При визначенні граничних умов виходять з положення, що міцність перерізу вважається вичерпаною, коли деформації бетону або арматури досягають своїх граничних значень, а саме $\varepsilon_b = \varepsilon_{bu}$ або $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$.

Висновки. Таким чином, одержані аналітичні залежності для визначення напружено-деформованого стану залізобетонних елементів кільцевого поперечного перерізу з залізобетону у можливому діапазоні зміни властивостей бетону і арматурної сталі для будь-якого етапу навантаження конструкції.

1. Берг О. Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. — М.: Стройиздат, 1974.

Berg O. Ya. Fizicheskie osnovy` teorii prochnosti betona i zhelezobetona. — М.: Strojizdat, 1974.

2. Бабич Є.М., Бабич В.Є. Розрахунок і конструювання залізобетонних балок: навчальний посібник/ Є.М. Бабич, В.Є. Бабич. — 2-ге видання, перероблене і доповнене.-Рівне: НУВГП, 2017.- С. 10-64.

Babich Ye.M., Babich V.Ye. Rozrakhunok i` konstruyuvannya zali`zobetonnykh balok: navchal`nij posi`bnik/ Ye.M. Babich, V.Ye. Babich. — 2-ge vidannya, pereroblene i` dopovnene.-Ri`vne: NUVGP, 2017.- S. 10-64.

3. Walraven J. Challenges for new materials in concrete structures. *Proc. of the XIII-th FIP Congress on Challenges for concrete in the Next Millennium*, May 1998, Amsterdam, vol. 1, pp. 3-8.

4. Голышев А. Б., Бачинский В. Я., Полищук В. П., Харченко А. В., Руденко И. В. Проектирование железобетонных конструкций — К.: Будівельник, 1990. — 544 с.

Goly`shev A. B., Bachinskij V. Ya., Polishhuk V. P., Kharchenko A. V., Rudenko I. V. Proektirovanie zhelezobetonny`kh konstrukcij — К.: Budi`vel`nik, 1990. — 544 s.

5. Кани Г. Предварительно напряженный бетон в проектировании и строительстве. — М.: Науч.-техн. изд-во автотр. лит-ры, 1958. - С. 15 - 18.

Kani G. Predvaritel`no napryazhenny`j beton v proektirovanii i stroitel`stve. — М.: Nauch.-tekhn. izd-vo avtotr. lit-ry`, 1958. - S. 15 - 18.

6. Лемыш Л. Л. Расчет железобетонных конструкций с использованием полных диаграмм сжатия бетона и арматуры //Бетон и железобетон. — 1991. — № 7. — С. 21—23.

Lemysh L.L. Raschet zhelezobetonnykh konstruktsiy s ispol'zovaniem polnykh diagramm szhatiya betona i armatury //Beton i zhelezobeton. — 1991. —№ 7.—S. 21—23.

7. Leongard F. "Spannbeton" für die Praxis. Wyd.3. Ernst u Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1973, p.246.

8. Бамбура А. Н., Бачинский В. Я., Журавлева Н. В., Пешкова И. К. Методические рекомендации по уточненному расчету железобетонных элементов с учетом полной диаграммы сжатия бетона — К.: НИИСК, 1987. — 24 с.

Bambura A. N., Bachinskij V. Ya., Zhuravleva N. V., Peshkova I. K. Metodicheskie rekomendacii po utocnennomu raschetu zhelezobetonnykh elementov s uchetom polnoj diagrammy szhatiya betona — K.: NIISK, 1987. — 24 s.

9. Єврокод 2. Проектування залізобетонних конструкцій. Частина 1-1. Загальні правила і правила для споруд (EN 1992-1-1:2004, IDT); ДСТУ-Н Б EN 1992-1-1:2010 . - [Чинний від 2014-07-01].- Київ; Мінрегіон України, 2014.- (Національний стандарт України)

Yevrokod 2. Proektuvannya zali'zobetonnikh konstrukci'j. Chastina 1-1. Zagal'ni pravila i pravila dlya sporud (EN 1992-1-1:2004, IDT); DSTU-N B EN 1992-1-1:2010 . - [Chinnij vi'd 2014-07-01].- Kiyiv; Mi'nregi'on Ukrayini, 2014.- (Naczi'onal'nij standart Ukrayini)

10. Карпюк В.М., Петров Н.Н., Целикова А.С. «Совершенствование деформационной модели расчета изгибаемых внецентренно растянутых железобетонных балок» / Карпюк В.М., Петров Н.Н., Целикова А.С.// Збірник наукових праць «Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди». випуск 36 – Рівне, Національний університет водного господарства та природокористування, 2018 ISSN 2218-1873 – с. 108-113.

Karpyuk V.M., Petrov N.N., Czelikova A.S. «Sovershenstvovanie deformatsionnoj modeli rascheta izgibaemykh vnecentrenno rastyanutykh zhelezobetonnykh balok» / Karpyuk V.M., Petrov N.N., Czelikova A.S.// Zbi'rnik naukovikh prac' «Resursoekonomni materi'ali, konstrukci'yi, budi'vli' ta sporudi». vipusk 36 – Ri'vne, Naczi'onal'nij uni'versitet vodnogo gospodarstva ta prirodokoristuvannya, 2018 ISSN 2218-1873 – s. 108-113

11. Давиденко О.І., Давиденко О.О. До розрахунку міцності залізобетонних колон кругового перерізу при сумісній дії поздовжньої і поперечної сили : матеріали всеукраїнської науково-практичної конференції «Будівельні матеріали, конструкції та споруди третього тисячоліття», м. Херсон, 19 травня 2019. С.36-42.

Davydenko O.I., Davydenko O.O. Do rozrakhunku mitsnosti zalizobetonnykh kolon kruhovoho pererizu pry sumisnii dii pozdovzhnoi i poperechnoi syly : materialy vseukrainskoi naukovo-praktychnoi konferentsii «Budiivelni materialy, konstruktsii ta sporudy tretoho tysyacholittia», m. Kherson, 19 travnia 2019. S.36-42. залізобетонного елементу