

# ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРОЕКТУВАННЯ ТА ЗАПРОВАДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНИХ КОНСТРУКЦІЙ, БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД

УДК 624.012.45

## РОЗРАХУНОК ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЕРЕХРЕСНО-СТРИЖНЕВИХ СИСТЕМ З ВРАХУВАННЯМ ТРІЩИНОУТВОРЕННЯ

## CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE CROSS-ROD SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT CRACKING

**Азізов Т.Н., д.т.н., проф.** ORCID 0000-0001-9621-9805 (Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини),

**Перейрас Роландо** ORCID 0000-0001-7845-3382 (Інженірингова група Джейкобс, Нью-Йорк, США)

**TaliatAzizov, Doctor of Engineering, Professor1**, (PavloTychynaUmanState PedagogicalUniversity, Ukraine), **Rolando Pereiras** (Jacobs Engineering Group, New York, USA)

Запропонована методика розрахунку залізобетонних перехресно-стрижневих систем з застосуванням класичного методу переміщень будівельної механіки, але при цьому визначення опорних згинальних моментів і реакцій проводиться з врахуванням змінної жорсткості стрижня по його довжині. При цьому кількість невідомих системи рівнянь не збільшується на відміну методу скінчених елементів, де для врахування змінної жорсткості приходиться збільшувати кількість елементів і збільшувати кількість невідомих

Crack formation changes the rigidity of the elements of the reinforced concrete cross-rod system. This, in turn, leads to a significant redistribution of loads between individual elements. Programs used to calculate reinforced concrete systems usually take into account the changes in the bending stiffnesses of the finite elements (bars) as a result of cracking. However, these programs do not take into account the change in torsional stiffnesses due to the formation of cracks. This leads to errors in the calculation of the loads, sometimes significant.

When calculating cross-rod systems by the classic method of displacement and the method of finite elements, the same number of unknowns is obtained. Therefore, their use is almost equivalent.

In a cross-rod system, the forces at either end of the element can be of different signs and can also vary significantly in magnitude. Therefore, when the stiffness changes as a result of cracking (in an iterative process), the stiffness

of the entire rod has to be changed, and this also leads to significant errors. Or for a more accurate calculation, each rod should be divided into several finite elements, which significantly increases the number of unknown variables.

To eliminate this drawback, the article proposes a method for calculating cross-rod systems using the classical method of displacement, but the table values of bending moments and reactions on the supports are determined taking into account the stiffness variability along the length of each element. Thus, with the same number of unknowns, it becomes possible to take into account the change in both torsional and bending stiffness along the length of each element. In this case, the length of the element can be divided into any number of sections without increasing the number of unknown systems of equations. These stiffness changes are easily recorded as a calculation subroutine. Given that solid slabs can also be calculated using the approximation in the form of a cross-rod system, the developed technique can also be used to design solid reinforced concrete slabs.

**Ключові слова:** перехресно-стрижнева система, тріщиноутворення, метод переміщень, система рівнянь, згинальна жорсткість, крутильна жорсткість.

cross-rod system, cracking, displacement method, system of equations, bending stiffness, torsional stiffness.

Аналіз досліджень і постановка задачі. Залізобетонні перехресно-стрижневі системи досить широко використовуються у будівництві. Крім того, суцільні залізобетонні перекриття також можуть бути розраховані за допомогою стрижневої апроксимації [9]. Статичний розрахунок перехресно-стрижневих систем не викликає труднощів. Це може бути класичний метод переміщень, метод сил, застосування розрахункових комплексів типу Ліра та ін., в яких реалізовано метод скінчених елементів.

Утворення тріщин змінює жорсткість елементів перехресно-стрижневої системи [4, 7, 10], що в свою чергу призводить до суттєвого перерозподілу зусиль між окремими елементами. В Україні для розрахунку залізобетонних систем як правило використовують програми Ліра, Мономах, Склад. Ці програми враховують зміни згинальних жорсткостей стрижневих скінчених елементів в результаті тріщиноутворення [1, 2, 5, 6]. Однак, зміну крутильних жорсткостей від утворення тріщин жоден з програмних комплексів не враховує. Це призводить до помилок в визначенні зусиль, іноді значних [8].

Врахування зміни згинальних і крутильних жорсткостей елементів перехресно-стрижневих систем не складно виконувати при застосуванні класичного методу переміщень. При цьому кількість невідомих системи рівнянь не відрізняється від кількості невідомих при застосуванні методу скінчених елементів (МСЕ).

В перехресно-стрижневій системі часто зусилля на одному та другому кінцях елемента може бути різного знаку, а також можуть чисельно суттєво відрізнятися. Тому при зміні жорсткості в результаті тріщиноутворення (в

ітераційному процесі) приходиться змінювати цю жорсткість всього стрижня, а це також призводить до значних помилок. Або для більш точного розрахунку слід кожний стрижень ділити на декілька скінчених елементів, що суттєво збільшує кількість невідомих. Так, наприклад, при розрахунку перехресно-стрижневої системи перекриття в плані 6х6 м (з обпиранням по кутах) з кроком балок одного та перпендикулярного напрямку 1 м розрахункова схема має 143 невідомих. Якщо кожну балку системи розбити хоча б на три частини (цього в принципі мало), то кількість невідомих зросте до 647. Якщо розбити кожен елемент на 5 частин, то кількість невідомих буде дорівнювати вже 1151, що більше початкової кількості у вісім разів! Тому задача розрахунку такої системи з суттєвим зменшенням кількості невідомих є актуальною.

У зв'язку з вищесказаним метою цієї статті є розроблення методики розрахунку перехресно-стрижневих систем з врахуванням тріщиноутворення без збільшення кількості невідомих системи рівнянь.

### **Викладення основного матеріалу.**

Розглянемо перехресно-стрижневу систему (рис. 1). Нехай система обпирається по кутах.

При розрахунку методом переміщень така система матиме  $3 \cdot n - 4$  невідомих, де  $n$  – кількість вузлів, (по три в кожному вузлі перетину стрижнів окрім кутових, де по дві невідомих). Відомо, що для розрахунку методом переміщень слід в кожному вузі задати жорстке закладення, яке перешкоджає повороту вузла відносно осі  $X$  та  $Y$ , і вертикальну в'язі, яка перешкоджає вертикальному переміщенню (по осі  $Z$ ). Визначення реакцій від повороту вузла на одиницю проводиться за таблицями, які наведені у будь-якому підручнику з будівельної механіки [3]. На рис. 2 показані опорні моменти та вертикальні реакції стрижня.

Реакції мають значення:

$$R_A = \frac{6 \cdot EJ}{l^2}; M_A = \frac{4 \cdot EJ}{l}; M_B = \frac{2 \cdot EJ}{l} \quad (1)$$

Ці реакції, як відомо, визначені для елемента з постійної по довжині жорсткістю. При цьому для визначення реакцій застосовують метод сил [3]. При розрахунку з врахуванням тріщиноутворення жорсткість елемента між двома закладеннями буде змінюватись. Тому реакції на опорах будуть відрізнятися від (1).

На рис. 3 через  $X_1$  та  $X_2$  позначені невідомі методу сил відповідно опорний момент та реакція

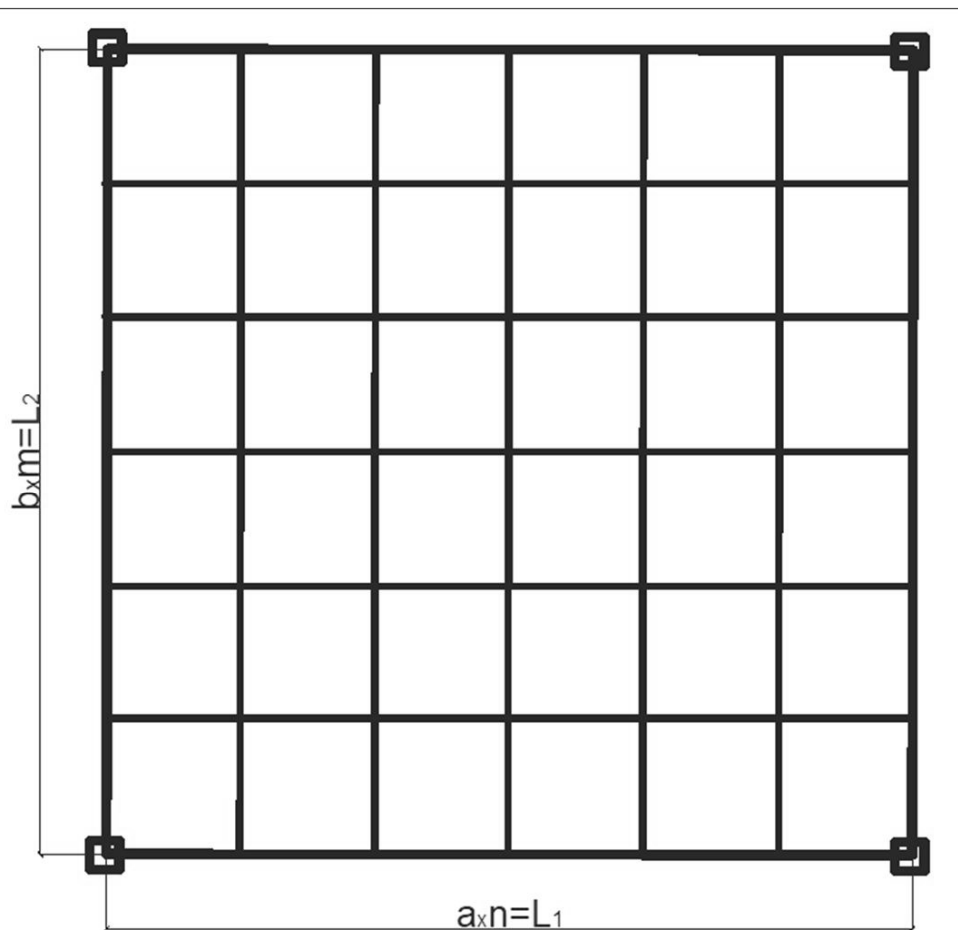


Рис. 1. Схема перехресно-стрижневої системи

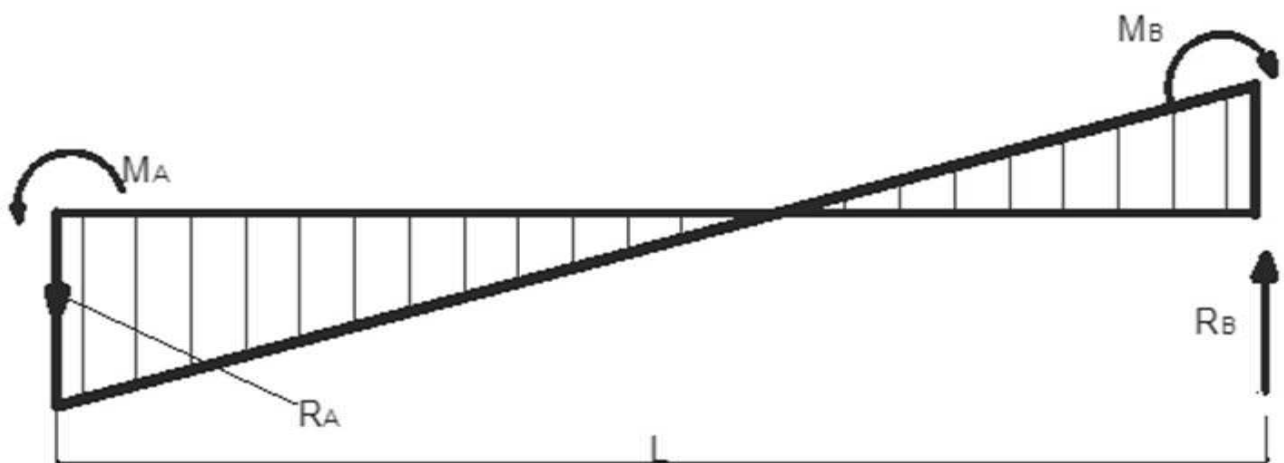


Рис. 2. Згинальні моменти та реакції від повороту вузла

Для визначення реакцій від повороту та переміщення закладення елемента з змінною по довжині жорсткістю розглянемо схему (рис. 3).

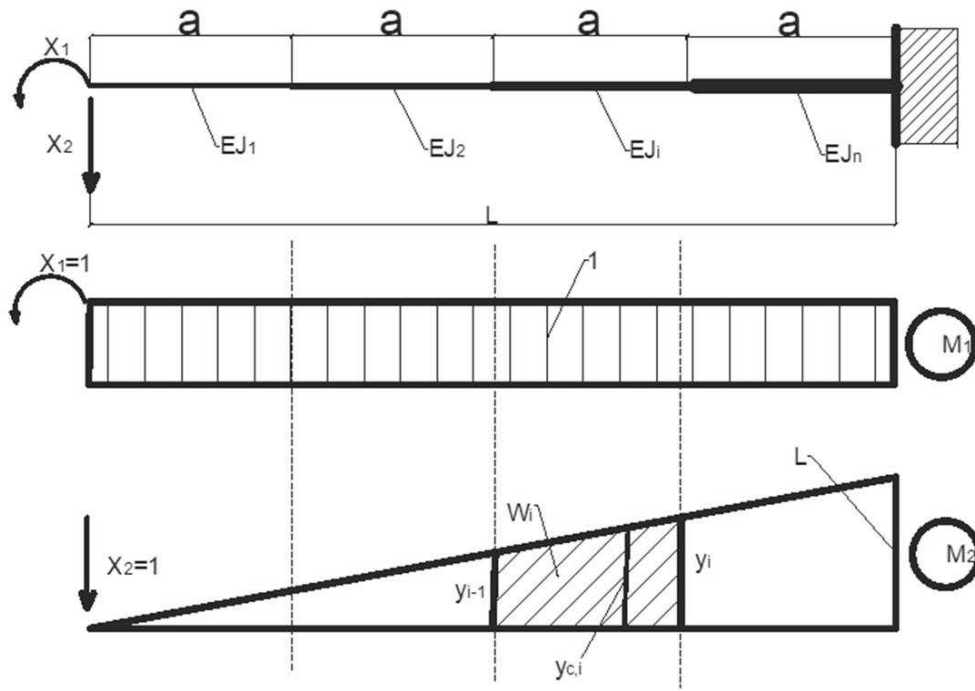


Рис. 3. Схема для визначення реакцій в закладенні

Реакції матимуть значення:

$$R_A^\varphi = \frac{1}{\delta_{12} - \frac{\delta_{11}\delta_{22}}{\delta_{21}}}; \quad M_A^\varphi = -R_A^\varphi \frac{\delta_{22}}{\delta_{21}} \quad (2)$$

Де коефіцієнти системи рівнянь  $\delta_{ik}$  визначаються за формулами:

$$\delta_{11} = a \sum_{i=1}^n \frac{1}{EJ_i}; \quad \delta_{12} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i}{EJ_i}; \quad \delta_{22} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i y_{c,i}}{EJ_i}; \quad (3)$$

$\omega_i, y_{c,i}$  – площа епюри та ордината центру ваги одиничної епюри (див. рис. 3) методу сил (реакції від одиничних переміщень визначаються, як відомо, методом сил), які не важко визначити з рис. 3;  $EJ_i$  – згинальна жорсткість  $i$ -тої ділянки;  $\delta_{21} = \delta_{12}$ .

Аналогічно будуть визначені реакції від переміщення опори на одиницю  $\Delta=1$ :

$$R_A^\Delta = \frac{1}{\delta_{22} - \frac{\delta_{21}\delta_{12}}{\delta_{11}}}; \quad M_A^\Delta = -R_A^\Delta \frac{\delta_{12}}{\delta_{11}} \quad (4)$$

де коефіцієнти системи рівнянь  $\delta_{ik}$  визначаються за тими ж формулами (3). Це пов'язано з тим, що невідомі в обох схемах однакові (момент в лівому

закладенні і вертикальна реакція.

Моменти на протилежних опорах будуть визначатися з очевидних відношень (див. рис. 3):

$$M_B^\varphi = M_A^\varphi - R_A^\varphi l; \quad M_B^\Delta = M_A^\Delta - R_A^\Delta l \quad (5)$$

Як бачимо, що моменти  $M_B$  на протилежних опорах при одиничному переміщенні  $\Delta=1$  не рівні моментам  $M_A$ , як це має місце при незмінній жорсткості стрижня по його довжині. Реакції і моменти за формулами (2) та (4) мають суттєву різницю з моментами за формулами (1).

Реактивні крутні моменти від повороту вузла на одиницю визначаються ще простіше з розгляду стрижня перемінного перерізу, один кінець якого повертається на одиницю:

$$M_{t,A}^\varphi = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a}{GJ_i}} \quad (6)$$

де  $GJ_i$  – крутильна жорсткість  $i$ -тої ділянки;  $a$  – довжина ділянки;  $n$  – кількість ділянок, на яку розділена довжина стрижня.

Маючи вирази для реакцій від одиничних переміщень, слід скласти систему рівнянь методу переміщень для визначення невідомих у вузлах перетину взаємно перпендикулярних стрижнів перехресно-стрижневої системи. Тут слід сказати, що коефіцієнти системи канонічних рівнянь методу переміщень  $a_{i,k}$  не рівні коефіцієнтам  $a_{k,i}$ . Це пов'язано з фактом, що при повороті на кут  $\varphi=1$  опори А (рис. 4) момент  $M_B$  не буде рівним моменту  $M_A$  при повороті опори В, тобто  $r_{AB} \neq r_{BA}$ . Цю особливість слід пам'ятати при складанні системи рівнянь. Але на кількість невідомих це не впливає.

Алгоритм розрахунку з врахуванням змінної жорсткості стрижнів має вигляд:

1. Всі стрижні перехресно-стрижневої системи (див. рис. 1) розбиваємо на  $n$  частин однакової довжини  $a$ . На нульовій ітерації жорсткість (як згинальна, так і крутильна) на кожній з ділянок однакова.

2. Проводимо розрахунок за методом переміщень з використанням табличних реакцій (1). В результаті отримаємо значення згинальних і крутних моментів на опорах кінцях стрижня (у вузлах перетину стрижнів вертикального та горизонтального напрямку по рис. 1).

3. Знаючи опорні моменти в кожному стрижні, визначаємо згинальні і крутні моменти в кожній з ділянок кожного стрижня перехресно-стрижневої системи.

4. Якщо згинальний момент більший за момент тріщиноутворення, то згинальну і крутну жорсткість цієї ділянки змінюємо за будь-якою відомою методикою визначення жорсткості залізобетонного елемента з тріщинами. При цьому крутильну жорсткість рекомендується визначати за методикою авторів [8, 9].

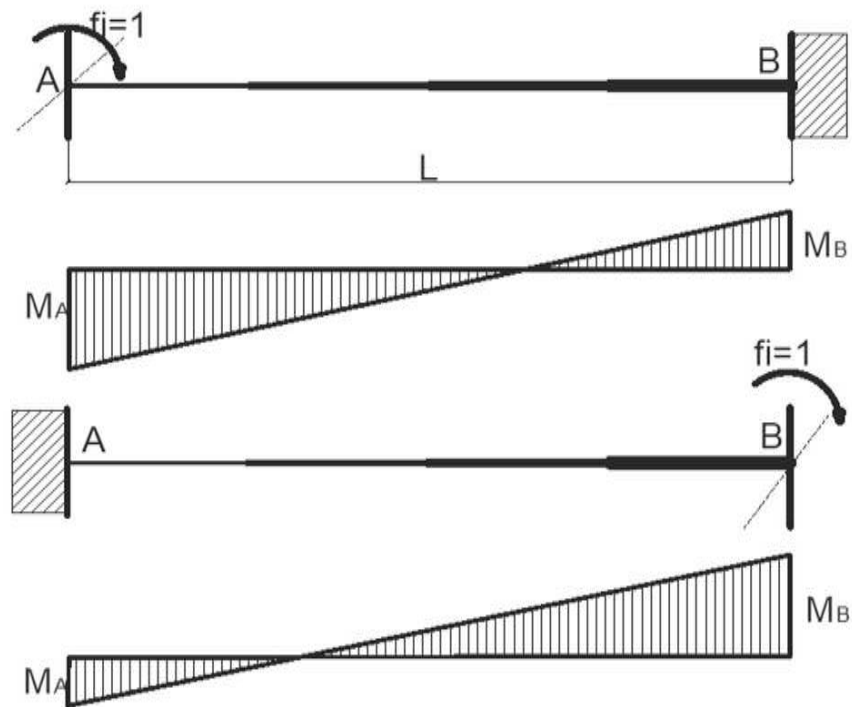


Рис. 4. Схема опорних моментів при повороті вузла А і вузла В

5. За формулами (2) та (4) визначаємо реакції в місцях умовного закладення методу переміщень і на основі цього визначаємо коефіцієнти канонічних рівнянь

6. Вирішуємо систему рівнянь. Визначаємо нові опорні моменти (в місцях перетину стрижнів перехресно-стрижневої системи).

7. Розрахунок повторюємо з п. 3 до отримання наперед заданої точності..

Розроблена методика може бути використана як для розрахунку плоских рам. При цьому крутильна жорсткість не фігурує в розрахунках, а тому проводити розрахунок ще простіше. Суть же розрахунку, яка полягає в правильному визначенні опорних моментів метода переміщень не змінюється.

Перевага запропонованого методу полягає в тому, що для отримання потрібної точності з врахуванням зміни жорсткостей елементів від тріщиноутворення не потрібно збільшувати кількість елементів, що призводить до збільшення невідомих. А перехресно-стрижнева система (див. рис. 1), де зовнішнє навантаження прикладене у вузлах перетину стрижнів, розраховується не наближено, а точно за допомогою методу переміщень будівельної механіки.

**Висновки та перспективи досліджень.** Традиційно при розрахунку перехресно-стрижневої системи з врахуванням зміни жорсткостей в результаті тріщиноутворення або змінюють жорсткість всього стрижня, або (для підвищення точності розрахунку) збільшують кількість скінчених елементів. При цьому суттєво збільшується кількість невідомих системи рівнянь. У статті запропоновано застосовувати класичний метод переміщень будівельної механіки, в якому опорні моменти і реакції визначаються для стрижня змінного

перерізу. При цьому кількість невідомих в системі рівнянь не збільшується. Запропонований підхід може бути використаний при розрахунку суцільних залізобетонних перекриттів. Змінення жорсткості по довжині кожного стрижня можна проводити у невеличкій підпрограмі..

У перспективі передбачається експериментальна перевірка методики розрахунку.

1. Городецкий А.С., Шмуклер В.С., Бондарев А.В. Информационные технологии расчета и проектирования строительных конструкций. – Харьков: НТУ ХПИ, 2003 – 889 с.

Horodetskyi A.S., Shmukler V.S., Bondarev A.V. Ynformatsyonnyye tekhnolohy rascheta y proektyrovaniya stroytelnykhkonstruksii. – Kharkov: NTU KhPY, 2003 – 889 s.

2. Городецкий А.С., Олин А.И., Батрак Л.Г. «ЛИРА-ПК» - программный комплекс для расчета и проектирования конструкций на персональныхкомпьютерах // Препринт НИИАССС. – К., 1988. – 105 с.

Horodetskyi A.S., Olyn A.Y., Batrak L.H. «LYRA-ПК» - prohrammnyi kompleks dlia rascheta y proektyrovaniya konstruksii na personalnykhkompiuterakh // Preprynt NYIASSS. – К., 1988. – 105 s.

3. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высш. школа, 1986. – 607 с.

Darkov A.V., Shaposhnikov N.N. Stroytelnaiamekhanika. M.: Vyssh. shkola, 1986. – 607 s.

4. Карпенко Н.И. Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.

Karpenko N.Y. Teoryia deformatsiy zhelezobetona s treshchynamy. – M.: Stroyizdat, 1976. – 208 s.

5. Компьютерные технологии проектирования железобетонных конструкций/ Ю.В. Верюжский, В.И. Колчунорв, М.С. Барабаш, Ю.В. Гензерский. – К.: Книжковевидавництво НАУ, 2006. – 808 с.

Kompiuternyye tekhnolohyy proektyrovaniya zhelezobetonnykh konstruksiyi/ Yu.V. Veriuzhskiy, V.Y. Kolchunorv, M.S. Barabash, Yu.V. Henzerskiy. – K.: Knyzhkovevydavnytstvo NAU, 2006. – 808 s.

6. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: СКАД СОФТ, 2011. – 736 с.

Perelmuter A.V. Raschetnyye modely sooruzheniy y vozmozhnost ykh analy za / A.V. Perelmuter, V.Y. Slyvker. – M.: SKAD SOFT, 2011. – 736 s.

7. American Concrete Institute (ACI) “Building Code Requirements for Reinforced Concrete,” ACI 318-89 and “Commentary.” ACI 318R-89, Detroit, 1989, 353pp.

8. Azizov, T., Jurkowska, N., Kochkarev, D. Basis of calculation on torsion for reinforced concrete structures with normal cracks (2019) Proceedings of the fib Symposium 2019: Concrete - Innovations in Materials, Design and Structures, pp. 1718-1725.

9. Azizov T., Pereiras R. Consideration of Torsional Rigidity in the Calculation of Plates Using Beam Approximation // SciencesofEurope. – 2022. – Vol 1, № 87(2022). – P. 58-61.DOI: 10.24412/3162-2364-2022-87-1-58-61.

10. EN 1992: Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings. – Brussels, 2002. – 230 p.