

**УДОСКОНАЛЕННЯ РОЗРАХУНКУ ПРОГИНІВ ЗГИНАЛЬНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З УРАХУВАННЯМ ТРИВАЛОЇДІЇ ЗОВНІШНЬОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

**IMPROVING THE CALCULATION OF DEFLECTIONS OF FLEXIBLE REINFORCED CONCRETE ELEMENTS TAKING INTO ACCOUNT THE LONG-TERM EFFECT OF EXTERNAL LOAD**

**Бабич Є. М., д. т. н., професор. ORCIDID: 0000-0003-1746-9991,  
Бабич В. Є., к. т. н., доцент. ORCIDID: 0000-0003-2811-2423. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)**

**Babych Y. M., Dr., Professor. ORCID ID: 0000-0003-1746-9991,  
Babych V. Y., PhD, Ass. Prof. ORCIDID: 0000-0003-2811-2423  
(National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)**

На підставі аналізу результатів розрахунку прогинів згинальних елементів з урахуванням тривалості дії навантаження встановлено, що метод визначення прогинів відповідно до Єврокод 2 суттєво недооцінює вплив повзучості бетону, а метод ДСТУ – переоцінює. Запропоновано при врахуванні впливу повзучості бетону виходити зі зміни напружено-деформованого стану поперечного перерізу в часі, деформації крайнього стиснутого волокна бетону визначати з використанням коефіцієнта повзучості та коефіцієнта повноти діаграми напружень в стиснутому бетоні. Запропонована формула для визначення коефіцієнта повноти епюри напружень на основі деформаційної методики, а також на основі цієї методики удосконалений метод визначення кривизни та прогинів згинальних елементів. В статті рекомендується продовжити дослідження впливу повзучості бетону на прогини згинальних елементів з одночасним проведенням експериментальних досліджень з використанням сучасних матеріалів.

The article analyzes the existing methods of determining deflections of bending elements taking into account long-term processes. It is noted that the main factor affecting the deflections of the elements over time is the creep of concrete. With prolonged action of loads due to concrete, creep of the compressed zone of concrete, the neutral line moves towards the stretched section zone, the stresses in the compressed concrete decrease, and the stresses in the reinforcement increase, while the deflections of the elements increase.

Based on the analysis of the results of calculation of deflections of flexural elements taking into account the duration of the load, it was established that the

method of determining deflections according to Eurocode 2 significantly underestimates the influence of concrete creep, and the DSTU method overestimates it. This is explained by the fact that the creep characteristics of concrete are not presented in the Eurocode 2 formulas, and the duration of the load is taken into account by one constant coefficient, the value of which is not justified. In the DSTU method, the increase in the deflection of the elements is taken into account by multiplying the deflection from the short-term load by the creep coefficient of concrete, which does not correspond to the real state of change in the stress-strain state of the section over time.

The article proposes to improve the method of calculating deflections by introducing elements of creep deformations into the stressed-strained state of the cross-section, taking into account the completeness of the stress plot in the concrete of the compressed zone. This is due to the fact that the creep coefficient of concrete is normalized based on the results of long-term tests of concrete prisms under uniform compression, and during bending there is a case when the stresses are not distributed evenly along the cross-section height. The formula for determining the coefficient of completeness of the stress plot in concrete is proposed.

The method of determining the deflections of flexural reinforced concrete elements based on the deformation technique is given, which consists in building a matrix of data on the stress-strain state of the elements depending on the gradual increase in the deformations of the extreme concrete fiber of the compressed cross-sectional area over the entire possible range of external load. Attention is drawn to the need to continue research on the effect of concrete creep on deflections of flexural reinforced concrete elements with long-term experimental tests of prototypes made of modern materials.

**Ключові слова:** Залізобетонні елементи, згин, тривалі навантаження, прогини, повзучість бетону, напружено-деформований стан, розрахунок, аналіз  
Reinforced concrete elements, bending, long-term loads, deflections, creep of concrete, stress-strain state, calculation, analysis

**Вступ.** Основною вимогою, яка визначає надійність будівельних конструкцій, є їх відповідність призначенню і здатність зберігати необхідні експлуатаційні якості протягом встановленого терміну експлуатації. Стосовно залізобетонних згинальних елементів (балок, плит) однією із основних експлуатаційних якостей є обмежені прогини під дією зовнішнього навантаження. Забезпечення цих якостей конструкцій відбувається на стадії проектування відповідними розрахунками.

В бетоні і залізобетоні в процесі експлуатації відбуваються зміни міцнісних і деформаційних характеристик, які називають тривалими процесами. Такі зміни можуть бути наслідком тривалих фізико-хімічних процесів, які відбуваються в бетоні в природньому стані та під дією різноманітних впливів

(постійних і змінних навантажень, вимушених деформацій, температурних та вологісних впливів тощо). Практика проектування і експлуатації залізобетонних конструкцій засвідчує, що найбільш впливовим на зміни напружено-деформованого стану згинальних елементів має повзучість бетону.

Тривалі процеси в багатьох випадках суттєво впливають на напружено-деформований стан залізобетонних конструкцій. В одних випадках такий вплив може бути позитивним, в інших – негативним. Негативний вплив тривалих процесів проявляється у збільшенні прогинів конструкцій, втратах попереднього напружування, зменшенні тріщиностійкості, збільшенні ширини розкриття тріщин тощо. Такі впливи можуть призвести до зменшення довговічності залізобетонних конструкцій та погіршенню експлуатаційних якостей. Виходячи з цього на стадії проектування конструкцій проявлення тривалих процесів повинно перевірятися розрахунками.

При короткочасному прикладанні навантаження вважається, що згинальні залізобетонні елементи працюють пружно і їх прогини з достатньою надійністю можна визначати з методами будівельної механіки. Для визначення прогинів елементів під дією тривалих навантажень загальноприйнятої методики наразі не існує, а тому удосконалення такої методики є задачею актуальною, вирішенню якої присвячується дана стаття.

**Стан питання та задача досліджень.** При короткочасній дії навантаження вважається, що жорсткість залізобетонних балок не змінюється, а прогини збільшуються пропорційно величині навантаження. В цьому випадку для визначення прогину балки можна використати розрахункові формули будівельної механіки як для пружних систем. Для статично визначених елементів постійного перерізу, до яких в більшості відносяться балки та плити, прогин можна визначати за формулою [1; 2]

$$f = \frac{1}{r} k_m l^2 = \kappa k_m l_d^2, \quad (1)$$

де  $k_m$  – коефіцієнт, що враховує розрахункову схему балки (значення коефіцієнтів наведені в [1]);

$\kappa = 1/r$  – кривизна осі елемента;

$r$  – радіусвигнутої осі елемента;

$l_d$  – розрахунковий проліт елемента.

При тривалій дії навантажень внаслідок повзучості бетону стиснутої зони нейтральна лінія переміщується в бік розтягнутої зони перерізу, напруження в стиснутому бетоні зменшуються, а напруження в арматурі збільшуються, при цьому збільшуються прогини елементів. Повзучість бетону стиснутої зони оказує подвійний вплив: вона спричиняє збільшення прогинів в часі та перерозподіл напружень між арматурою і бетоном. З урахуванням тривалої дії

навантаження повний прогин залізобетонних елементів  $f_l$  визначається за формулою [3]

$$f_l = f_1 - f_2 + f_3, \quad (2)$$

де  $f_1$  – прогин від короткочасної дії всього навантаження;

$f_2$  – початковий прогин від постійних і змінних тривалих навантажень при їх короткочасній дії;

$f_3$  – прогин від тривалої дії постійних і змінних тривалих навантажень.

При визначенні прогину від дії тривалих навантажень вплив повзучості допускається враховувати шляхом множення відповідного значення кривизни (прогину), визначеного як для короткочасної дії навантаження, на коефіцієнт повзучості  $\varphi_k$  [2]. Виходячи з цього значення третьої складової формули (2) визначиться за формулою

$$f_3 = f_2(1 + \varphi_k), \quad (3)$$

де  $\varphi_k$  – граничний коефіцієнт повзучості бетону, який можна приймати по таблиці 1 [1].

Таблиця 1

Граничні коефіцієнти повзучості бетону

Вологість навколишн. середовищ, %	Граничний коефіцієнт повзучості $\varphi_k$ при класі бетону на стиск				
	C16/20	C25/30	C32/40	C40/50	C50/60
Вище 75	2,2	1,8	1,5	1,3	1,1
40 - 75	3,0	2,5	2,0	1,7	1,5
Нижче 40	4,2	3,4	3,0	2,5	2,0

В європейському стандарті Єврокод 2[4] рекомендується прогин згинальних елементів знаходити за спрощеною формулою

$$f = \xi f_{II} + (1 - \xi) f_I, \quad (4)$$

де  $f_I$  і  $f_{II}$  – значення прогину, який визначається відповідно для перерізу без тріщин та з тріщинами;

$\xi$  – коефіцієнт, який визначається за формулою

$$\xi = 1 - \beta \left( \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_s} \right)^2, \quad (5)$$

де  $\beta$  – коефіцієнт, який враховує вплив тривалості навантаження на середню деформацію ( $\beta = 1,0$  – при нетривалій дії навантаження;  $\beta = 0,5$  – при тривалій дії навантаження);

$\sigma_s$  – напруження в арматурі в перерізі з тріщиною при навантаженні, за якого визначається прогин;

$\sigma_{sr}$  – напруження в розтягнутій арматурі в перерізі з тріщиною при навантаженні, за дії якого утворюється перша тріщина.

В формулі (5) відношення  $\sigma_{sr}/\sigma_s$  можна замінити відношенням  $M_{cr}/M_{Ek}$ , де  $M_{cr}$  – згинальний момент, який сприймає переріз перед утворенням першої тріщини;  $M_{Ek}$  – згинальний момент від дії зовнішнього навантаження з

характеристичним значенням. Для визначення повного прогину за формулою (2) її складові необхідно обчислювати за формулою (4) при відповідних значеннях навантаження та розрахункових коефіцієнтів.

Аналіз наведених формул для визначення прогинів згинальних залізобетонних елементів з урахуванням тривалого навантаження мають суттєві недоліки. Загально прийнято, що збільшення прогинів в часі відбувається внаслідок повзучості бетону стиснутої зони бетону. Але в формулах (4) і (5) характеристики повзучості бетону ніяким чином не представлені, а тривалість навантаження враховується одним тільки коефіцієнтом  $\beta$ , який для всіх бетонів і умов експлуатації приймається однаковим без будь якого обґрунтування.

В формулі (3) вплив тривалості дії навантаження на прогин елементів враховується інтегрально множенням прогину від нетривалої дії навантаження на граничний коефіцієнт повзучості бетону. Оскільки прогин і кривизна осі елемента  $\varkappa$  залежать від деформацій в стиснутому бетоні  $\varepsilon_c$  і в розтягнутій арматурі  $\varepsilon_s$  ( $\varkappa = (\varepsilon_c + \varepsilon_s)/d$ ,  $d$  – робоча висота поперечного перерізу елемента), то з формули (3) випливає, що на коефіцієнт  $\varphi_k$  множаться одночасно деформації бетону і деформації арматури, що не відповідає дійсному напружено-деформованому стану поперечного перерізу елемента, який змінюється в часі внаслідок повзучості бетону.

Виходячи з наведеного, в дослідженнях ставиться за мету удосконалити метод визначення прогинів згинальних залізобетонних елементів при короткочасній та тривалій дії навантажень на підставі аналізу напружено-деформованого стану поперечного перерізу елемента з урахуванням повзучості бетону.

**Розрахунок тривалих прогинів залізобетонних елементів на основі реальнонапружено-деформованого стану їх поперечного перерізу.** Експериментальні дослідження засвідчують, що повні прогини згинальних залізобетонних елементів (короткочасні в сумі з прогинами, викликаними повзучістю бетону, як правило перевищують в два-три рази і більше короткочасні прогини, які виникають в процесі короткочасного навантаження [3]. Внаслідок повзучості бетону стиснутої зони бетону в згинальних елементах після прикладання короткочасного навантаження в часі змінюється напружено-деформований стан поперечних перерізів (рис. 1).

Під час короткочасного прикладання повного тривалого навантаження  $M_{Ek}$  (спільно постійне навантаження та змінне тривале навантаження) в час  $\tau$  в поперечному перерізі балки виникають стискаючі напруження в крайній фібрі бетону  $\sigma_{c\tau}$  та в розтягнутій арматурі  $\sigma_{s\tau}$  та відповідні їм відносні деформації  $\varepsilon_{c\tau}$  і  $\varepsilon_{s\tau}$  (рис. 1а). В цьому стані короткочасна кривизна осі елемента визначиться за формулою

$$\varkappa_{\tau} = \frac{\varepsilon_{c\tau} + \varepsilon_{s\tau}}{d}. \quad (6)$$

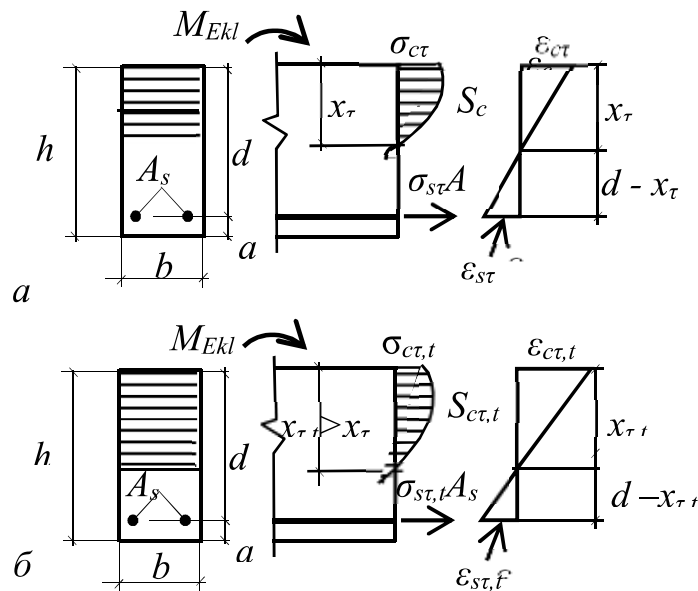


Рис. 1. Напружено-деформований стан нормального перерізу згинального елемента при короткочасній (а) та тривалій дії навантаження (б)

В формулі (6) враховано, що в розрахунках деформації розтягу і в бетоні і в арматурі приймаються зі знаком «мінус».

В час спостереження  $t \dots \infty$  внаслідок повзучості бетону стиснутої зони його крайові деформації можуть збільшитися до величини

$$\varepsilon_{ct,t} = \varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cr,t} = \varepsilon_{ct}(1 + \varphi_k), \quad (7)$$

де  $\varepsilon_{cr,t}$  – відносні деформації повзучості бетону в стиснутій зоні перерізу.

Треба зазначити, що граничний коефіцієнт повзучості бетону встановлений для різних класів бетону на основі експериментальних досліджень бетонних призм при рівномірному розподілу напружень по поперечному перерізі. В згинальних елементах в стиснутій зоні бетону напруження по перерізу розподіляється не рівномірно, а його форма розподілу може змінюватися від трикутної при незначних навантаженнях до майже прямокутної при наближенні до граничних станів. Тому в формулі (7) має місце переоцінка впливу повзучості на деформації бетону стиснутої зони.

В роботі [5] також пропонується визначати деформації повзучості бетону в часі за формулою близькою до (7), але вводити до значення  $\varphi_k$  коефіцієнт 0,5. Введення такої величини коефіцієнта, який враховує форму епюри напружень в стиснутому бетоні має суттєві вади, оскільки він передбачає на всьому діапазоні навантаження елемента трикутну епюру напружень, яка передбачає пружну роботу бетону при будь яких навантаженнях.

Що б усунути цей недолік, спираючись на деформаційну методику розрахунку залізобетонних конструкцій, в формулу (7) доцільно ввести коефіцієнт повноти епюри напружень в стиснутій зоні перерізу  $w_k$ , який визначається за формулою [6]

$$w_k = \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,ck}} \right)^k, \quad (8)$$

де  $\varepsilon_c$  – відносна деформація крайнього стиснутого волокна бетону;

$\varepsilon_{c1,ck}$  - деформація при максимальних напруженнях в розрахунках за граничними станами другої групи

$a_k$  – коефіцієнт поліному п'ятої степені залежності між напруженнями і деформаціями бетону при стиску, визначається по таблицям [6; 7].

З урахуванням (8) формула (7) набуває вигляду

$$\varepsilon_{ct,t} = \varepsilon_{ct} + \varepsilon_{crt,t} = \varepsilon_{ct}(1 + w_k \varphi_k). \quad (9)$$

Використовуючи гіпотезу плоских перерізів збільшені деформації в розтягнутій арматурі  $\varepsilon_{st,t}$  (рис. 1б) знаходяться за формулою

$$\varepsilon_{st,t} = \frac{\varepsilon_{ct,t}}{x_{\tau,t}}(d - x_{\tau,t}). \quad (10)$$

Враховуючи (9) і (10) кривизна осі балки при тривалій дії навантаження визначиться за формулою

$$\kappa_{\tau,t} = \frac{\varepsilon_{ct,t} + \varepsilon_{st,t}}{d}. \quad (11)$$

Прогин від тривалої дії навантаження  $f_{\tau,t}$  можна визначити за формулою (1), прийнявши  $\kappa = \kappa_{\tau,t}$ . При визначенні повного прогину за формулою (2) в цьому випадку необхідно приймати  $f_3 = f_{\tau,t}$  при відповідному значенні тривалого навантаження.

**Аналіз розрахунків прогинів за розглянутими методами.** При визначенні повних прогинів елементів відповідно до Єврокод 2 [4] необхідно визначати прогини при короткочасній дії навантаження безпосередньо перед утворенням тріщин, а також значення згинального моменту за якого утворюється перша тріщина.

Відповідно до ДБН В.2.6-98:2009 [7] граничне зусилля, яке сприймає залізобетонний елемент у разі утворення нормальних тріщин, визначають із розрахунку цього елемента як суцільного тіла з урахуванням пружних деформацій у арматурі та непружних деформацій у розтягнутому і стиснутому бетоні при досягненні деформацій розтягу бетону граничних значень, рівних

$$\bullet \quad \varepsilon_{ctu} = 2f_{ctm}/E_{ck}, \quad (12)$$

де  $\varepsilon_{ctu}$  – значення відносних граничних деформацій розтягу бетону;

$f_{ctm}$  – середнє значення міцності бетону на осьовий розтяг;

$E_{ck}$  – характеристичне значення початкового модуля пружності бетону.

При визначенні напружень та деформацій в поперечному перерізі елементів використовується деформаційна методика, в якій залежність напружень  $\sigma_c$  від деформацій при стиску  $\varepsilon_c$  і розтягу приймається у вигляді [7]

$$\sigma_c = f_{ck} \sum_{k=1}^5 a_k \eta^k, \quad (13)$$

де  $f_{ck}$  – характеристичне значення міцності бетону на стиск;

$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ ;

$\varepsilon_{c1}$  – деформації при максимальних напруженнях (для граничних станів другої групи  $\varepsilon_{c1} = \varepsilon_{c1,ck}$ );

$a_k$  – коефіцієнти полінома, значення яких для граничних станів другої групи наведені в [2; 7].

При визначенні кривизни осі елементів розглядається перша стадія роботи залізобетонних елементів, тобто робота елементів без тріщин. В граничному стані деформації в розтягнутому бетоні на рівні арматури досягають граничних значень  $\varepsilon_{ctu}$  (рис. 2а). Використовуючи гіпотезу плоских перерізів, можна знайти деформації крайньої стиснутої фібри бетону  $\varepsilon_{c(1)}$ , приймаючи в першому наближенні значення  $x = z_{(1)}$ ,

$$\varepsilon_{c(1)} = \frac{\varepsilon_{ctu}}{d - z_{(1)}} z_{(1)}. \quad (14)$$

Деформації в розтягнутій арматурі внаслідок її сумісної роботи з бетоном приймаються рівними  $\varepsilon_s = \varepsilon_{ctu}$ . Задача знаходження деформації крайньої стиснутої фібри бетону  $\varepsilon_c$  перед утворенням тріщин вирішується методом наближення значення  $x = z_{(n)}$  до виконання умови рівності проєкцій повздовжніх зусиль в стиснутій і розтягнутій зонах поперечного перерізу (рис. 2а):

$$\bullet \quad S_{cc} = S_{ct} + S_s, \quad (15)$$

де  $S_{cc}$  – внутрішнє зусилля в бетоні стиснутої зони;

$S_{ct}$  – те саме, в бетоні розтягнутої зони;

$S_s$  – зусилля в розтягнутій арматурі.

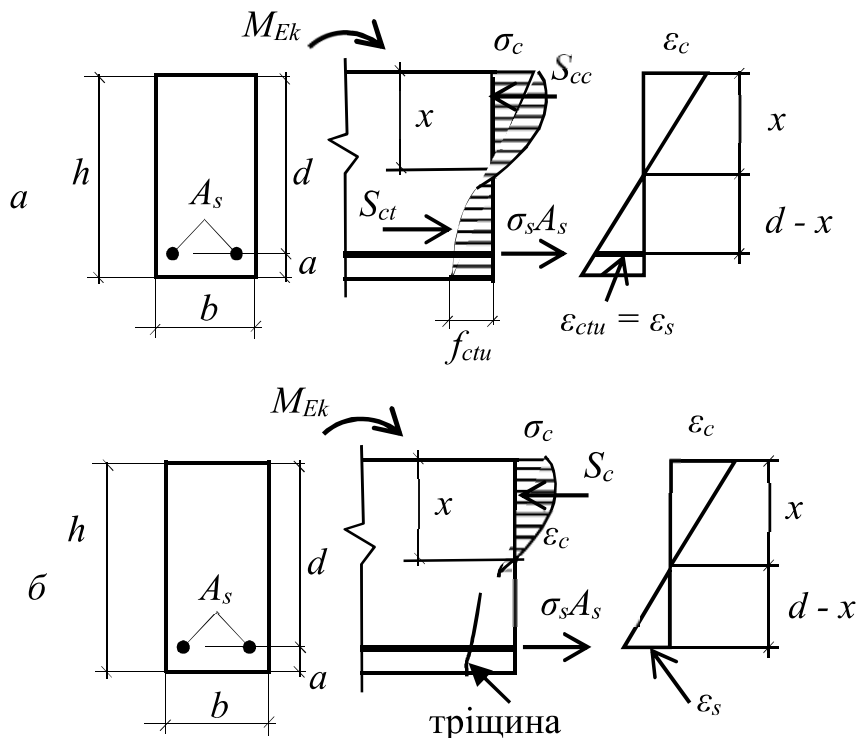


Рис. 2. Напружено-деформований стан поперечного перерізу балки до утворення (а) та після утворення нормальних тріщин (б)



Для визначення зусиль в бетоні стиснутої і розтягнутої зон використовується деформаційну модель, в якій діаграма деформування бетону в обох зонах описується залежністю у вигляді поліному п'ятої степені (13).

Відповідно до напружено-деформованого стану перерізу за рисунком 2а внутрішні зусилля, приймаючи в першому наближенні ( $n = 1$ )  $x = z_{(1)}$ , можна визначити за формулами [6]:

$$S_{cc} = b \int_0^{\varepsilon_{c(1)}} \sigma_c d\varepsilon = w_k f_{ck} b z_{(1)}; \quad (16)$$

$$S_{ct} = b \int_0^{\varepsilon_{ctu}} \sigma_{ct} d\varepsilon_{ct} = w_t f_{ctm} b (h - z_{(1)}); \quad (17)$$

$$S_s = \varepsilon_s E_s A_s = \varepsilon_{ctu} E_s A_s, \quad (18)$$

де  $w_k$  і  $w_t$  – відповідно коефіцієнти повноти епюри напружень в бетоні стиснутої та розтягнутої зони перерізу.

Значення коефіцієнтів  $w_k$  і  $w_t$  визначаються за формулою (8) залежно від значення  $\eta = \varepsilon_{c(1)}/\varepsilon_{c1,ck}$  для стиснутої зони бетону та  $\eta = 1,0$  для розтягнутої зони. В першому наближенні можна прийняти  $z_{(1)} = 0,5d$ , користуючись формулами (16)...(18), окремо знайти зусилля лівої і правої частини рівняння (5). Достовірність виконання умови (15) можна оцінити за виразом

$$\Delta S = \frac{S_{cc}}{S_{ct} + S_s} = (0,95 \dots 1,05), \quad (19)$$

Якщо умова (19) не виконується, то необхідно виконати другий крок наближення, прийнявши значення  $z_{(2)} = z_{(1)}(1 \pm 0,05)$ . Розрахунки повторюються до досягнення виконання умови (19), за якої остаточно приймаються значення  $z_{(n)}$  і  $\varepsilon_{c(n)}$  ( $n$  – останній крок наближення).

Приймаючи  $\varepsilon_{ct} = \varepsilon_{c(n)}$  і  $\varepsilon_{it} = \varepsilon_{ctu}$ , за формулою (6) визначається кривизна осі балки перед утворенням тріщин  $\chi_{crc}$ . Згинальний момент, який може сприйняти елемент перед утворенням тріщин визначається за формулою [6]

$$M_{crc} = \beta_k f_{ck} b z_{(n)}^2 + \beta_t f_{ctm} b (h - z_{(n)}) + \varepsilon_{ctu} E_s (d - z_{(n)}), \quad (20)$$

де  $\beta_c$  – коефіцієнт, який залежно від величини  $\eta = \varepsilon_{c(n)}/\varepsilon_{c1}$  визначається за формулою [6]

$$\beta_k = \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+1} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1,ck}} \right)^k, \quad (21)$$

$\beta_t$  – коефіцієнт, який визначається за формулою (18) при  $\eta = 1,0$ .

Після утворення тріщин жорсткість балки зменшується і постає необхідність визначення кривизни її осі за дії згинального моменту від характеристичного значення зовнішнього навантаження  $M_{Ek}$ . Тобто за цієї задачі відоме зовнішнє навантаження, але невідомі при цьому навантаженні значення деформацій в крайній стиснутій фібрі бетону  $\varepsilon_c$ , поздовжньої розтягнутої арматури  $\varepsilon_s$  та висоти стиснутої зони бетону  $x$  (рис. 2б).

Оскільки рівнянь рівноваги внутрішніх і зовнішніх зусиль два, а невідомих три, то задачу можна вирішити методом послідовних наближень. Для цього розраховується таблиця, в якій висвітлюється значення всіх характеристик напружено-деформованого стану перерізу залежно від рівня деформацій крайньої стиснутої фібри бетону, тобто від відношення  $\varepsilon_{c(n)}/\varepsilon_{c1,ck}$ , де  $\varepsilon_{c1,ck}$  –

відносні деформації стиску бетону при максимальних характеристичних напруженнях.

Таблиця механічних характеристик напружено деформованого стану перерізу залежно від відношення  $\varepsilon_{c(n)}/\varepsilon_{c1,ck}$ , будується в такій послідовності:

- в першій строчці таблиці приймається значення  $\varepsilon_c = 0,1\varepsilon_{c1,ck}$ ;
- в першому наближенні приймається  $z_{(1)} = 0,5d$ ;
- за гіпотезою плоских перерізів визначаються деформації розтягнутої арматури

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c \times \frac{d-z_{(1)}}{z_{(1)}}; \quad (21)$$

- визначаються внутрішні поздовжні зусилля в бетоні  $S_c$  і арматурі  $S_s$  (рис. 2б) за формулами

$$S_c = b \int_0^{\varepsilon_c(1)} \sigma_c d\varepsilon = w_k f_{ck} b z_{(1)}; S_s = \varepsilon_s E_s A_s; \quad (22)$$

- перевіряється достовірність першого наближення значення  $z_{(1)}$  виконанням умови

$$S_c/S_c = (1,05 \dots 0,95). \quad (23)$$

Якщо умова (23) виконується, то можна обмежитися першим наближенням і за визначеними  $\varepsilon_c$  і  $\varepsilon_s$  за формулою (6) обчислити кривизну осі елемента з тріщинами в розтягнутій зоні. В іншому випадку необхідно уточнити в другому наближенні значення  $z_{(n)}$  і розрахунки повторювати до задоволення умови (23). Після кінцевого уточнення значення  $z_{(n)}$  за відповідними деформаціями бетону  $\varepsilon_c$  і арматури  $\varepsilon_s$  визначається кривизна осі балки за формулою (6) та відповідний згинальний момент внутрішніх сил  $M_{Sk}$  за формулою

$$M_{Sk} = \beta_k f_{ck} b z_{(n)}^2 + \varepsilon_s E_s A_s (d - z_{(n)}). \quad (22)$$

В подальшому в таблиці в другій строчці приймається  $\varepsilon_c = 0,2\varepsilon_{c1,ck}$  і всі розрахунки повторюються як в першій строчці. Для отримання масиву даних на всьому діапазоні навантаження балки розрахунки виконуються в кількості до 14 строчок, тобто до  $\varepsilon_c = 1,4\varepsilon_{c1,ck}$ . За отриманими в кожній строчці значеннями будується графік залежності кривизни  $\varkappa$  від згинального моменту  $M_{Sk}$  (рис. 3), на якому знаходиться кривизна  $\varkappa_k$  яка відповідає згинальному моменту від зовнішнього характеристичного навантаження.

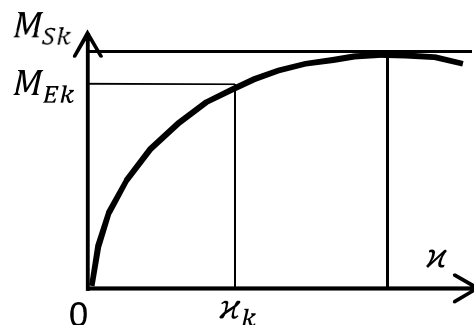


Рис. 3. Графік залежності  $\varkappa$  від  $M_{Sk}$

Порівняння результатів визначення повних прогинів за розглянутими вище методики виконується на прикладі розрахунку залізобетонної балки вільно

лежачої на двох опорах з рівномірно розподіленим навантаженням. Основні геометричні характеристики балки наведені на рис.4.

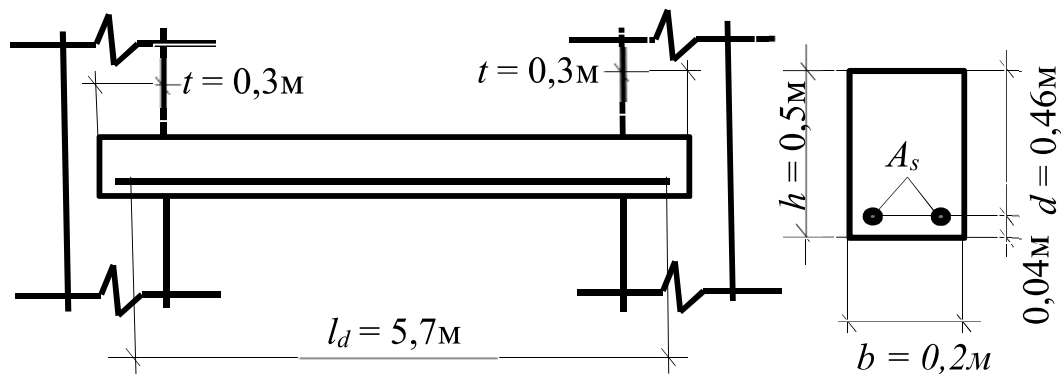


Рис. 4. Конструктивна схема балки

Балка виготовляється з бетону класу С25/30 і армується поздовжньою стержневою арматурою класу А500С. Повне розрахункове навантаження на 1 м довжини балки, яке включає постійне, змінне тривале та змінне короточасне навантаження з урахуванням коефіцієнтів надійності за навантаженнями складає  $q_{Ed} = 41$  кН/м, а повне експлуатаційне (характеристичне) навантаження при коефіцієнтах надійності за навантаженням  $\gamma_f = 1,0$   $-q_{Ek} = 35$  кН/м. Постійні та змінні тривалі навантаження в сумі становлять  $q_{Ekl} = 19$  кН/м.

Механічні характеристики бетону прийняті відповідно [7]:  $f_{ck,prism} = 22$  МПа;  $f_{ctm} = 2,6$  МПа;  $E_{ck} = 29$  ГПа;  $\varepsilon_{cl,ck} = 0,00176$ ;  $\varepsilon_{cu1,ck} = 0,00355$ .

Механічні характеристики арматури:  $f_{yk} = 500$  МПа;  $E_s = 2,1 \times 10^5$  МПа;  $\varepsilon_{ud} = 0,02$ . Площа поперечного перерізу поздовжньої розтягнутої арматури, визначеної розрахунком балки за граничними станами першої групи, становить  $A_s = 9,82$  см<sup>2</sup> (2Ø25 А500С). Вологість навколишнього середовища, в якому експлуатується балка, знаходиться в межах 40 – 75%.

До розрахункових формул визначення прогинів балки відповідно до методики Єврокода 2 [4] входять значення кривизни осі балки перед утворенням тріщин та моменту тріщиноутворення. В розтягнутому бетоні виникнуть перші тріщини в даній балці, коли крайові деформації досягнуть величини, визначеної за формулою (12)

$$\varepsilon_{ctu} = 2f_{ctm}/E_{ck} = 2 \times 2,6/29000 = 0,000179.$$

Деформації в нижньому шарі арматури перед утворенням тріщин приймаються рівними  $\varepsilon_s = \varepsilon_{ctu}$ . Тобто, зусилля в розтягнутій арматурі відомі і рівні  $S_s = \varepsilon_{ctu} E_s A_s$ . Виходячи з гіпотези плоских перерізів, деформації крайнього стиснутого волокна бетону можна знайти за формулою (14) і в подальшому задачу необхідно вирішувати методом поступових наближень до виконання умови (19). В результаті виконаних розрахунків виявлено, що перед утворенням тріщин деформації в крайньому стиснутому волокні бетону склали  $\varepsilon_c = 0,000143$ , а тріщини виникнуть при навантаженні, коли згинальний момент перевищить значення  $M_{crc} = 46,6$  кН×м.

Перед утворенням тріщин кривизну осі балки можна знайти за формулою  
 $\kappa = (\varepsilon_c + \varepsilon_s)/d = (0,000143 + 0,000179)/0,46 = 0,000696/\text{м}$ .

Прогин балки перед утворенням тріщин складе

$$f_l = \kappa k_m l^2 = 0,000696 \times 5/48 \times 5,7^2 = 0,0024 \text{ м} = 0,24 \text{ см}.$$

(значення  $k_m = 5/48$  згідно з [1]).

Для подальшого аналізу напружено-деформованого стану поперечного перерізу балки за допомогою програми Excel розрахована таблиця, в якій за наведеною вище методикою знайдені характерні деформації матеріалів, кривизна осі балки та її прогини та моменти внутрішніх зусиль залежно від рівня деформацій в крайній фібрі стиснутої зони бетону, тобто від відношення  $\varepsilon_c/\varepsilon_{c1,ck}$  (таблиця 2). Використовуючи отримані дані про тріщиноутворення в балці та дані таблиці 2, можна визначити прогини балки за наведеними вище методиками.

Таблиця 2

Таблиця розрахункових значень деформацій, кривизни осі балки, прогинів та згинальних моментів внутрішніх зусиль

$\eta = \varepsilon_c/\varepsilon_{c1,ck}$	$\varepsilon_c \times 10^5$	$\varepsilon_s \times 10^5$	$\chi \times 10^5, 1/\text{м}$	$f, \text{см}$	$\omega_k$	$M_{Sk}, \text{кН} \times \text{м}$
0,1	17,60	37,10	118,92	0,40	0,1191	31,47
0,2	35,20	71,33	231,58	0,78	0,2251	60,34
0,3	52,80	103,90	340,65	1,15	0,3191	87,34
0,4	70,40	134,56	445,57	1,51	0,4017	112,34
0,5	88,00	161,88	543,21	1,84	0,4740	134,58
0,6	105,60	188,80	640,00	2,17	0,5367	155,72
0,7	123,20	210,16	724,71	2,45	0,5906	172,99
0,8	140,80	226,80	799,13	2,70	0,6366	186,54
0,9	158,40	226,80	837,39	2,83	0,6754	187,31
1,0	176,00	226,80	875,65	2,96	0,7076	188,40
1,1	193,60	226,80	913,91	3,09	0,7340	188,97
1,2	211,20	226,80	952,17	3,22	0,7552	189,16
1,3	228,80	226,80	990,43	3,35	0,7717	189,08
1,4	246,40	226,80	1028,70	3,48	0,7841	188,99
1,5	264,00	226,80	1066,96	3,61	0,7928	188,97

Максимальний згинальний момент в перерізі балки від короткочасної дії постійного, змінного тривалого та змінного нетривалого навантаження визначиться за формулою

$$M_{EK} = q_{EK} l_d^2 / 8 = 35,0 \times 5,7^2 / 8 = 142,2 \text{ кН} \times \text{м}.$$

Згинальний момент від тривалої дії постійного та змінного тривалого навантаження складає

$$M_{EKl} = q_{EKl} l_d^2 / 8 = 19,0 \times 5,7^2 / 8 = 77,2 \text{ кН} \times \text{м}.$$

Повний прогин балки з урахуванням тривалої дії навантаження визначається за формулою (2), в якій складова  $f_1$  враховує прогин від короткочасної дії всього навантаження, значення якого відповідно до [4] визначається за формулою (4).

В формулу (4) входять дві складові  $f_1$  і  $f_{II}$ . Прогин  $f_1$  виникає в балці до утворення тріщин і визначений раніше ( $f_1 = 0,24$  см). Значення прогину  $f_{II}$  знаходиться за таблицею 2 при  $M_{Ek} = 142,2$  кН×м. Воно (з використанням інтерполяції) виявилось рівним  $f_{II} = 2,07$  см.

В формулу (4) входить також коефіцієнт  $\xi$ , який знаходиться за формулою (5)

$$\xi = 1 - \beta(M_{crc}/M_{Ek})^2 = 1 - 1(46,6/142,2)^2 = 0,89.$$

(коефіцієнт  $\beta = 1$ , оскільки розглядається короткочасна дія навантаження).

Короткочасний прогин від короткочасної дії повного навантаження обчислюється за формулою (4)

$$f_1 = 0,89 \times 2,07 + (1 - 0,89) \times 0,24 = 1,87 \text{ см.}$$

Значення прогину  $f_2$  відкороткочасної дії постійних і тривалих змінних навантажень ( $M_{Ekl} = 77,2$  кН×м) знаходиться аналогічно. За таблицею при  $M_{Ekl} = 77,2$  кН×м прогин  $f_{II} = 0,94$  см, а прогин  $f_I = 0,24$  см. Зміниться значення коефіцієнта  $\xi$ , оскільки необхідно його визначати при дії  $M_{Ekl}$ , тобто

$$\xi = 1 - \beta(M_{crc}/M_{Ekl})^2 = 1 - 1(46,6/77,2)^2 = 0,64.$$

Величина прогину  $f_2$  складає

$$f_2 = 0,64 \times 0,94 + (1 - 0,64) \times 0,24 = 0,69 \text{ см.}$$

При визначенні прогину  $f_3$  з урахуванням тривалості дії навантаження порівняно з попереднім розрахунком зміниться тільки значення коефіцієнта  $\xi$ , при визначенні якого коефіцієнт  $\beta$  приймається рівним  $\beta = 0,5$ , а саме

$$\xi = 1 - \beta(M_{crc}/M_{Ekl})^2 = 1 - 0,5(46,6/77,2)^2 = 0,82.$$

Прогин від тривалої дії постійного і змінного тривалого навантаження складає

$$f_3 = 0,82 \times 0,94 + (1 - 0,82) \times 0,24 = 0,81 \text{ см.}$$

За формулою (2) повний прогин залізобетонної балки з урахуванням тривалості дії навантаження, визначений за методикою Єврокода 2, складає

$$f = f_1 - f_2 + f_3 = 1,87 - 0,69 + 0,81 = 1,99 \text{ см.}$$

Для визначення повних прогинів за методикою [1] значення прогинів при короткочасній дії повного навантаження та тривалих (постійних, змінних тривалих) можна визначити безпосередньо за таблицею 2. Так для короткочасної дії повного навантаження ( $M_{Ek} = 142,2$  кН×м) прогин складає  $f_1 = 2,07$  см, а для короткочасної дії постійних і змінних тривалих навантажень ( $M_{Ekl} = 77,2$  кН×м) –  $f_2 = 0,94$  см.

Вплив повзучості бетону на величину прогину балок враховується шляхом множення відповідного прогину (кривизни), визначеного як для короткочасної дії навантаження, на коефіцієнт повзучості  $\phi_k$  [2]. Значення коефіцієнта повзучості бетону встановлені нормами [1] залежно від класу бетону і відносної вологості навколишнього середовища. Для умов прикладу за табл.

$2\varphi_k = 2,5$ . Виходячи з цього, прогин балки від тривало дії постійних і змінних тривалих навантажень складає

$$f_3 = f_2 (1 + \varphi_k) = 0,94(1 + 2,5) = 3,29 \text{ см.}$$

Повний прогин за формулою (2) становить

$$f = 2,07 - 0,94 + 3,29 = 4,42 \text{ см.}$$

В попередньому методі визначення повного прогину елемента коефіцієнт повзучості бетону вводиться, як зазначалося вище, безпосередньо до величини прогину. Але повзучість відбувається в стиснутій зоні бетону, а тому цей коефіцієнт доцільно вводити до деформацій бетону в стиснутій зоні перерізу.

На рис. 1 наведені напружено-деформовані стани поперечного перерізу при короткочасній і тривалій дії тривалих навантажень. При короткочасному прикладанні навантаження в стиснутій зоні виникають початкові крайові деформації бетону  $\varepsilon_{ct}$  (рис. 1а), які при дії постійних і змінних тривалих навантажень за значення згинального моменту  $M_{Ekl} = 77,2 \text{ кН}\times\text{м}$  за даними табл. 1 складають  $\varepsilon_{ct} = 0,000513$ . З часом крайові деформації зростають і набувають свого максимального значення  $\varepsilon_{ct,t}$  (рис. 1б), яке можна обчислити за формулою

$$\varepsilon_{ct,t} = \varepsilon_{ct}(1 + \varphi_k) = 0,000513(1 + 2,5) = 0,001795.$$

За визначеною величиною деформації стиснутого бетону з урахуванням повзучості бетону за табл. 2 тривалий прогин від тривалої дії постійних і змінних тривалих навантажень складає  $f_3 = 2,92 \text{ см}$ . Значення прогинів при короткочасному навантаженні приймаються за табл. 2 такими ж, як і в попередньому розрахунку. Повний прогин балки від дії всіх навантажень з урахуванням повзучості бетону складає

$$f = 2,07 - 0,94 + 2,92 = 4,05 \text{ см.}$$

Оскільки в бетоні стиснутої зони перерізу в згинальних елементах напруження розподілені по кривій, то доцільно коефіцієнт повзучості бетону корегувати, вводячи до нього коефіцієнт повноти епюри напружень, який можна визначати за формулою (8) або за табл. 2. Для даного прикладу при  $M_{Ekl}$  за табл. 2 значення коефіцієнт повноти епюри напружень складає  $w_k = 0,53$ . В цьому випадку деформації в бетоні  $\varepsilon_{ct,t}$  за формулою (9) рівні

$$\varepsilon_{ct,t} = \varepsilon_{ct}(1 + w_k \varphi_k) = 0,000513(1 + 0,53 \times 2,5) = 0,001193.$$

За такого значення  $\varepsilon_{ct,t}$  за табл. 2 прогин  $f_3 = 2,38 \text{ см}$ , з урахуванням якого повний прогин балки складе

$$f = 2,07 - 0,94 + 2,38 = 3,51 \text{ см.}$$

Аналіз отриманих результатів визначення прогинів за наведеними методами неоднозначно оцінюють вплив повзучості бетону на повні прогини балки. Так, метод визначення прогину балки за методом [1] засвідчує, що тривале навантаження збільшує прогин тільки на 6,4%. Проте, визначений прогин за методом [1; 2] показує, що повзучість бетону може збільшити прогин балки на 113,5% (майже більше ніж в 2 рази). Методи, які ґрунтуються на напружено-деформованому стані поперечного перерізу з урахуванням коефіцієнта повзучості бетону стиснутої зони та з одночасним урахуванням

коефіцієнту повноти епюри напружень в бетоні та коефіцієнта його повзучості свідчать, що повзучість бетону може призвести до збільшення повного прогину на 95,6 та 69,6%.

Чітко визначити достовірність того чи іншого розглянутого методу визначення прогинів з урахуванням повзучості бетону на сьогодні практично не можливо, оскільки останні майже 20 років публікації результатів експериментальних тривалих досліджень балок практично відсутні.

**Висновки.** 1. Удосконалено метод визначення прогинів згинальних залізобетонних елементів на основі деформаційної методики, який полягає в побудові матриці даних про напружено-деформований стан елементів залежно від поступового збільшення деформацій крайньої фібри бетону стиснутої зони перерізу на всьому можливому діапазоні зовнішнього навантаження.

2. Розрахунок прогинів згинальних елементів за методом Єврокод 2 суттєво не дооцінює вплив тривалого навантаження на їхню величину.

3. В ДСТУ Б В.2.6-156:2010 допускається тривалу дію навантаження на прогини елементів враховувати шляхом множення на коефіцієнт повзучості величину прогину, визначену як при короткочасній дії відповідного навантаження, що призводить до переоцінки впливу повзучості бетону, оскільки в цьому випадку на цей коефіцієнт множаться деформації арматури, що не відповідає дійсному напружено-деформованому стану поперечного перерізу елементів під дією тривалих навантажень.

4. Доведено, що вплив повзучості бетону на тривалі прогини елементів доцільно здійснювати шляхом визначення кривизни елементів, виходячи з напружено-деформованого стану поперечного перерізу з урахуванням сумарних деформацій стиснутого бетону та коефіцієнта повноти діаграми напружень в стиснутій зоні бетону.

5. Запропонована формула для визначення коефіцієнта повноти напружень в стиснутій зоні бетону на основі деформаційної методики на усіх рівнях короткочасного навантаження.

6. Необхідно продовжити дослідження впливу повзучості бетону на прогини згинальних залізобетонних елементів з проведенням експериментальних тривалих випробувань дослідних зразків, виготовлених із сучасних атеріалів

1. ДСТУ Б В,2,6-156:2010, Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону: правила проектування, Київ, Мінрегіонбуд України, 2011, 118 с, DSTU B V.2.6-156:2010, Concrete and reinforced concrete structures from heavy concrete: design rules, Kyiv, Ministry of Regional Development of Ukraine, 2011, 118 p.
2. Бамбура А, М., Сазонова І, Р., Дорогова О, В., Войцеховський О, В, Проектування залізобетонних конструкцій: посібник, Київ, Майстер книг, 2018, 240 с,

- Bambura A, M., Sazonova I, R., Dorohova O, V., Voitsekhovskiy O, V Designing of reinforced concrete structures: a manual, Kyiv, Master of books, 2018, 240 p.
3. Голышев А,Б,, Кривошеев П, И,, Бамбура А, М, Теория железобетона на экспериментальной основе, Киев, «Гамма-Принт», 2009, 397 с,  
Hohlyshev A, B., Kryvosheiev P, Y., Bambura A, M, Theory of reinforced concrete on an experimental basis, Kyiv, "Gamma-Print", 2009, 397 p.
  4. EN 1992-1-1:2004, Eurocode 2, Design of concrete structures, Part, 1: General rules and rules for buildings, 2004,
  5. Бабич Є, Є,, Бабич Є, М, Врахування повзучості бетону в розрахунках прогинів згинальних залізобетонних елементів, Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць, Випуск 33, Рівне, НУВГП, 2016, С,104-113,  
Babich Ye, Ye., Babich Ye, M, Taking into account the creep of concrete in the calculation of deflections of flexural reinforced concrete elements, Resource-economical materials, constructions, buildings and structures: collection of scientific works, Issue 33, Rivne, NUWMRU 2016, P. 104-113.
  6. Бабич Є, М,, Бабич В, Є, Розрахунок і конструювання залізобетонних балок: навчальний посібник, 2-ге видання, Рівне, НУВГП, 2017, 191 с,  
Babych E, M., Babych V, Ye, Calculation and design of reinforced concrete beams: study guide, 2nd edition, Rivne, NUWMRU, 2017, 191 p
  7. ДБН В,2,6-98:2009, Бетонні та залізобетонні конструкції: основні положення, Київ, Мінрегіонбуд України, 2011, 71 с,  
DBN V, 2,6-98:2009, Concrete and reinforced concrete structures: basic provisions, Kyiv, Ministry of Regional Development of Ukraine, 2011, 71 p.