

ПРОСТОРОВІ РІВНЯННЯ СТІЙКОСТІ АНІЗОТРОПНИХ ТОВСТИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ ОСЬОВОГО ТИСКУ

SPATIAL STABILITY EQUATIONS FOR ANISOTROPIC THICK CYLINDRICAL SHELLS UNDER AXIAL COMPRESSION

Трач В.М., д.т.н., професор. ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Подворний А.В., к.т.н., доцент. ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

Trach V.M., doctor of technical sciences, professor. ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Podvornyi A.V., candidate of technical sciences, associate professor. ORCID ID: 0000-0001-8518-4395 (National university of water management and nature resources use, Rivne)

Спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, в роботі, отримана лінеаризована тривимірна система звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних теорії пружності анізотропного пустотілого тіла в циліндричній системі координат. На її основі приведений підхід для знаходження величин критичних напружень анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки, що знаходиться під дією осьового тиску

In this paper, a three-dimensional system of homogeneous differential equations of stability in partial derivatives of the theory of elasticity for an anisotropic thick-walled cylindrical shell is obtained based on the modified Hu-Washizu variational principle. The Bubnov-Gal'orkin method was used to reduce it to one-dimensional. This method approximated unknown systems of equations along the generatrix and took into account the periodicity of resolving functions in the circular direction. The discrete orthogonalization method was used to solve the one-dimensional problem in the direction of the normal to the middle surface of the shell.

The influence of the ratio of length to radius on the values of critical axial stresses of an anisotropic thick-walled composite cylindrical shell is studied. Changes in the values of critical stresses of axial compression depending on the change in the length of the structure and the number of its layers at different angles of rotation of the main directions of elasticity of a unidirectional fibrous material is analyzed.

Ключові слова: товста анізотропна циліндрична оболонка, рівняння стійкості, тривимірна постановка, критичні напруження.
Thick anisotropic cylindrical shell, stability equations, three-dimensional formulation, critical stresses.

Вступ. Аналіз останніх досліджень. Більшість задач стійкості оболонкових конструкцій з композитних матеріалів розв'язується з використанням двовимірних класичних або уточнених теорій [1, 2, 3]. Це призводить до того, що для товстостінних оболонок низька зсувна жорсткість та неоднорідність матеріалу за товщиною або не враховуються зовсім, або враховуються не в повній мірі. У зв'язку із цим важливим елементом дослідження стійкості таких оболонкових конструкцій з композитних матеріалів є використання просторової теорії.

В роботах присвячених розрахунку на стійкість оболонкових конструкцій в просторовій постановці [4, 5] увага зосереджена на ізотропних та ортотропних оболонках. Застосування лише таких матеріалів звужує клас композиційних конструкцій, які можливо використовувати. Зауважимо, що при утворенні оболонкових систем з волокнистих композитів шляхом їх намотування на оправки виникає розбіжність між головними напрямками пружності ортотропного матеріалу та осями криволінійної системи координат оболонок (рис. 1). Матеріал таких конструкції в осях оболонки необхідно розглядати як такий, що має одну площину пружної симетрії, яка є перпендикулярною до нормалі стосовно серединної поверхні оболонки [6, 7, 8, 9].

В представленій роботі викладена методика отримання тривимірних диференціальних рівнянь стійкості теорії пружності товстостінного анізотропного тіла на основі модифікації функціонала узагальненого принципу Ху-Васідзу. Розв'язок отриманої системи реалізується поєднанням методів Бубнова-Гальоркіна та дискретної ортогоналізації. В роботі досліджено стійкість циліндричних анізотропних оболонкових конструкцій з матеріалу з однією площиною пружної симетрії під дією осьових навантажень.

Постановка мети і задач досліджень. Принцип Ху-Васідзу. У відповідності до варіаційного принципу Ху-Васідзу [9, 10, 11] рівняння стійкості, співвідношення пружності (рівняння стану), геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається інтегралу:

$$\Pi_1 = \left\{ \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right\} dV + \right.$$

$$+ \left. \left\{ \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) \right\} dS. \right. \quad (1)$$

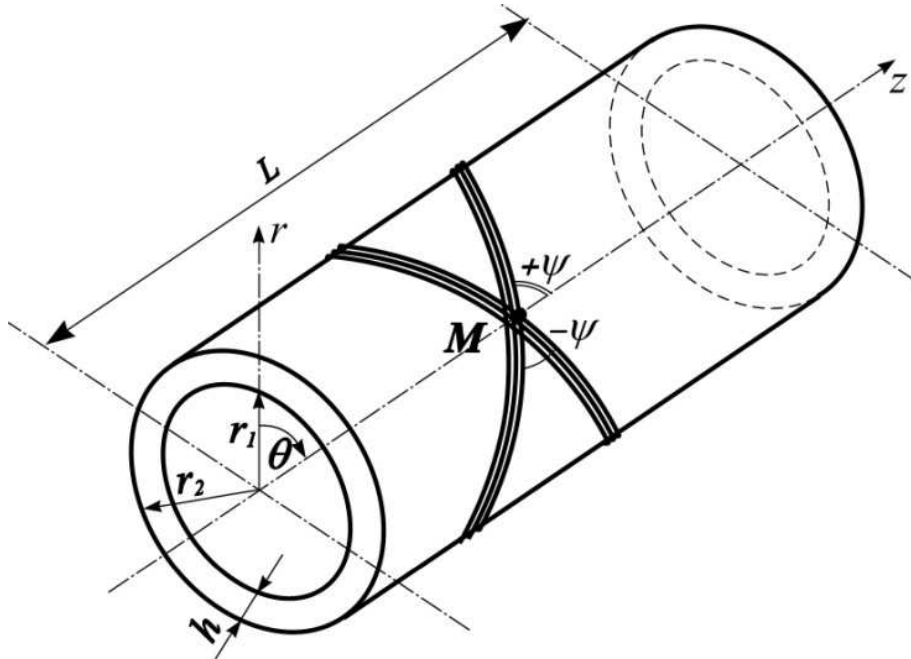


Рис. 1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка.

Тут, без додаткових умов варіюються переміщення u_i , деформації e_{ij} , напруження σ_{ii} , напруження p_i на поверхні S_2 , що викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, u_i – компоненти вектора переміщень, крапка з комою перед параметрами i, j позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом $i, j = 1, 2, 3$.

Спираючись на підхід описаний в [9, 11], функціонал (1) приведемо до вигляду, який використаємо при виведенні рівнянь, що можуть описувати стійкість оболонкових конструкцій в просторовій постановці

Представимо $W(\sigma_1, \varepsilon)$ – потенціальну енергію деформації, що є функцією напружень σ та деформацій ε так

$$W_1 = -\frac{1}{2} \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 - \frac{1}{2} \varepsilon_2^T (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2 +$$

$$+ (\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}) \sigma_1 + \varepsilon_2^T(u) (B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}) \varepsilon_2. \quad (2)$$

В (2) вектори напружень та деформацій розділено на дві частини

$$\begin{aligned}\sigma_1^T &= (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}), & \sigma_2^T &= (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}), \\ \varepsilon_1^T &= (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}), & \varepsilon_2^T &= (\varepsilon_{zz}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{z\theta}),\end{aligned}\quad (3)$$

Зв'язок між якими прийнято у вигляді матричної залежності

$$\sigma = B \cdot \varepsilon \quad (4)$$

або

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Для отримання системи рівнянь стійкості було використано такі розклади [12]:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \alpha \varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_1^{(2)}, \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)}.\end{aligned}\quad (6)$$

Тут параметри напружено-деформованого стану з нуликом – докритичні значення деформацій та напружень; з індексами (1) – збурені; з індексами (2) – теж, лише у квадраті; α - нескінченно мала стала, що незалежна від координат.

Підставивши (6) в (2), та провівши відповідні перетворення, отримаємо такий вираз потенціальної енергії деформації

$$\begin{aligned}W_1 &= -\frac{1}{2} \left(\sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)} \right)^T B_{11}^{-1} \left(\sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)} \right)^T \left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12} \right) \left(\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)} \right) + \\ &+ \left[\left(\varepsilon_1^0 + \alpha \varepsilon_1^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_1^{(2)} \right)^T + \left(\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)} \right)^T B_{12}^T B_{11}^{-1} \right] \times \\ &\times \left(\sigma_1^0 + \alpha \sigma_1^{(1)} + \alpha^2 \sigma_1^{(2)} \right) + \left(\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)} \right)^T \times \\ &\times \left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12} \right) \left(\varepsilon_2^0 + \alpha \varepsilon_2^{(1)} + \alpha^2 \varepsilon_2^{(2)} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Після підстановки (7) в (1) з умови стаціонарності варіації функціоналу (1) обумовленої зміною компонентів вектора переміщень u і напружень σ_1 , при використанні виразів для напружень $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$, переміщень $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$, геометричних співвідношень [12]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{zz}^{(1)} &= \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial z}; & \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^{(1)}; & \varepsilon_{rr}^{(1)} &= \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}; \\
\varepsilon_{z\theta}^{(1)} &= \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial \theta}; & \varepsilon_{rz}^{(1)} &= \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial r}; \\
\varepsilon_{r\theta}^{(1)} &= \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^{(1)} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial \theta},
\end{aligned} \tag{8}$$

нехтуючи залежностями для варіації кінетичної енергії та прирівнюючи вирази при незалежних варіаціях напружень $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\tau_{r\theta}$, $\delta\tau_{rz}$ й переміщень δu_r , δu_θ , δu_z в інтегралі за об'ємом V , отримуємо таку лінеаризовану систему рівнянь стійкості в просторовій постановці анізотропних товстостінних композитних циліндричних оболонок:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{c_{23} + 1}{r} \sigma_{rr} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{c_{22}}{r^2} u_r + \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \\
&+ \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \left(-r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} - \frac{\partial u_r}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} c_{23} - \right. \\
&\left. - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_r c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial \theta} c_{36} - 2 \frac{\partial u_\theta}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \\
&+ \left(-2r \frac{\partial^2 u_r}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \left(-2 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta \right) \tau_{r\theta}^0; \\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} &= \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{36} - \frac{1}{r} \tau_{rz} - c_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{2c_{16}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \\
&- \frac{c_{12}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{c_{66}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - c_{16} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \\
&- \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \left(-r \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} - \frac{\partial u_z}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} c_{23} + \right. \\
&\left. + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \left(-2r \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \left(-2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \tau_{r\theta}^0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} c_{23} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial z} c_{36} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta} - \frac{c_{12} + c_{66}}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial \theta} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \\
&- c_{66} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} - \frac{c_{22}}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{c_{26}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} - c_{16} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{c_{26}}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} - \\
&- \frac{2c_{26}}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} + \left(-r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} - \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} c_{13} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} c_{23} + \right. \\
&+ \left. \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} c_{23} - \frac{1}{r} u_\theta c_{23} + 2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial \theta} c_{36} + 2 \frac{\partial u_r}{\partial z} c_{36} \right) \sigma_{rr}^0 + \\
&+ \left(-2r \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z \partial r} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \tau_{rz}^0 + \left(-2 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r} u_r \right) \tau_{r\theta}^0 ; \\
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} c_{13} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) c_{23} + \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) c_{36} + \sigma_{rr} c_{33} ; \\
\frac{\partial u_z}{\partial r} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \tau_{r\theta} a_{45} + \tau_{rz} a_{55} ; \\
\frac{\partial u_\theta}{\partial r} &= \frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \tau_{r\theta} a_{44} + \tau_{rz} a_{45} .
\end{aligned} \tag{9}$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; σ_{rr} , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$ – компоненти тензора напружень (3); u_z , u_θ , u_r – переміщення оболонки за напрямками відповідно осей z , θ , r . Напруження σ_{rr}^0 , τ_{rz}^0 та $\tau_{r\theta}^0$ визначаються після розв’язку задачі про докритичний напружено-деформований стан залежно від прикладеного до циліндра навантаження [7]. Сталі c_{kl}^i ($k, l=1, 2, 3, 6$) – це характеристики i -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i [13] матеріалу оболонки:

$$c_{11}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left(a_{22}^i a_{66}^i - a_{26}^{i2} \right); \quad c_{12}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left(a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i \right);$$

$$c_{22}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left(a_{11}^i a_{66}^i - a_{16}^{i2} \right); \quad c_{16}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left(a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i \right);$$

$$c_{26}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left(a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i \right); \quad c_{66}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left(a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2} \right);$$

$$|A_{22}^i| = a_{66}^i \left(a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2} \right) + a_{26}^i \left(a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i \right) + a_{16}^i \left(a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i \right)$$

$$c_{13}^i = a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i; \quad c_{23}^i = a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i; \quad (10)$$

$$c_{36}^i = a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i; \quad c_{33}^i = a_{33}^i - \left(a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i \right).$$

Таким чином, для визначення критичних напружень анізотропних композитних циліндричних оболонок, при використанні варіаційного рівняння (1), отримана тривимірна система рівнянь стійкості (9) з шестилінеаризованих однорідних диференціальних рівнянь в частинних похідних, відносно компонентів векторів $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$.

При розв'язку задачі визначення критичних напружень системі (9) повинні відповідати умови на бічних поверхнях при:

$$r = r_1$$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$$

$$\text{і } r = r_2$$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0. \quad (11)$$

Умови на торцях циліндра при $z = 0$, $z = L$ (рис. 1) такі

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (12)$$

Методика досліджень. Приведення тривимірної системи рівнянь теорії пружності до одновимірної. Для розв'язку тривимірної системи рівнянь (9) при відповідних умовах на поверхнях і торцях (11), (12) оболонки скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди [14] за координатою вздовж твірної циліндра Z так, щоб вони задовольняли крайовим умовам (12):

$$\sigma_{rr}(r, z, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[y_{1,pk}(r) \cos k\theta + y'_{1,mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z;$$

$$\begin{aligned}
\tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z ; \\
\tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z ; \\
u_r(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{4, pk}(r) \cos k\theta + y'_{4, mk}(r) \sin k\theta] \sin l_m z ; \\
u_z(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{5, pk}(r) \cos k\theta + y'_{5, mk}(r) \sin k\theta] \cos l_m z ; \\
u_{\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} [y_{6, pk}(r) \sin k\theta + y'_{6, mk}(r) \cos k\theta] \sin l_m z . \quad (13)
\end{aligned}$$

Тут $y_{i, pk}$, $y'_{i, mk}$ ($i=1\div 6$) – компоненти, розкладених за тригонометричними рядами Фур'є, складових напружено-деформованого стану оболонки: σ_{rr} , τ_{rz} , $\tau_{r\theta}$, u_r , u_z , u_{θ} , ap , m , k – хвильові числа в рядах. Параметр $l_m = m\pi/L$, де L – довжина твірної циліндра (рис. 1).

Докритичні значення напружень σ_{rr}^0 , τ_{rz}^0 та $\tau_{r\theta}^0$ в розглядуваній задачі визначаються після встановлення докритичного напружено-деформованого стану за використанням методу прямих [7, 15].

Після математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (9) за допомогою співвідношень (13), отримуємо нескінченну систему звичайних однорідних диференціальних рівнянь стійкості в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}}{dr} = T(r, \lambda)\bar{y}, \quad T(r, \lambda) = t_{i, j}(r, \lambda), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad j = \overline{1, \infty}, \quad (14)$$

де $\bar{y} = \{y_{1, pk}; y_{2, pk}; y_{3, pk}; y_{4, pk}; y_{5, pk}; y_{6, pk}; y'_{1, mk}; y'_{2, mk}; y'_{3, mk}; y'_{4, mk}; y'_{5, mk}; y'_{6, mk}\}$ – розв'язуюча вектор-функція, $T(r, \lambda)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r та параметра навантаження λ .

Розв'язок отриманої системи рівнянь стійкості (14) при використанні граничних умов (11) проведено з використанням чисельного методу дискретної ортогоналізації [15]. Він також був використаний в [2, 3, 6÷9], де метод був відповідно адаптований для розв'язання задач розрахунків анізотропних товстостінних і тонких композитних циліндричних оболонок.

Алгоритм розв'язання задачі стійкості анізотропних композитних циліндричних оболонок обертання, що знаходяться під дією осьових стискаючих навантажень, реалізований у вигляді пакетів прикладних комп'ютерних програм.

Реалізація пропонуваної методики встановлення критичних напружень композитної анізотропної циліндричної оболонки. Дослідимо вплив зміни довжини та кількості шарів анізотропної оболонки на величини її критичних напружень. Для цього розглянемо стійкість циліндричних оболонок довжинами $L=0,6\text{ м}, L=1,2\text{ м}, L=2,4\text{ м}$; радіусом середньої поверхні $r=0,6\text{ м}$ та товщиною $h=0,03\text{ м}$. Оболонки утворені армуванням композиту під кутами $\pm\psi$ до твірної. В якості композитного матеріалу обраний склопластик з такими фізико-механічними характеристиками: $E_{zz}=44,5E_0$, $E_{\theta\theta}=E_{rr}=10,7E_0$, $G_{z\theta}=G_{r\theta}=4,18E_0$, $G_{rz}=8,48E_0$, $\nu_{z\theta}=\nu_{\theta z}=0,0628$, $E_0=1000\text{ МПа}$.

На рис. 2 представлені графіки, що описують залежність критичних величин осьових стискаючих напружень σ_{zz}^{cr} від кута повороту ψ головних напрямів пружності композитного матеріалу. Криві 1 (суцільні) представляють відношення $L/r=1$, криві 2 (штрихові) – $L/r=2$, а криві 3 (пунктирні) – $L/r=4$. Літерами біля номеру кривої позначається тип оболонки: а – одношарова, б – чотиришарова. Графіки побудовані в осях $\sigma_{zz}^{cr} - \psi$.

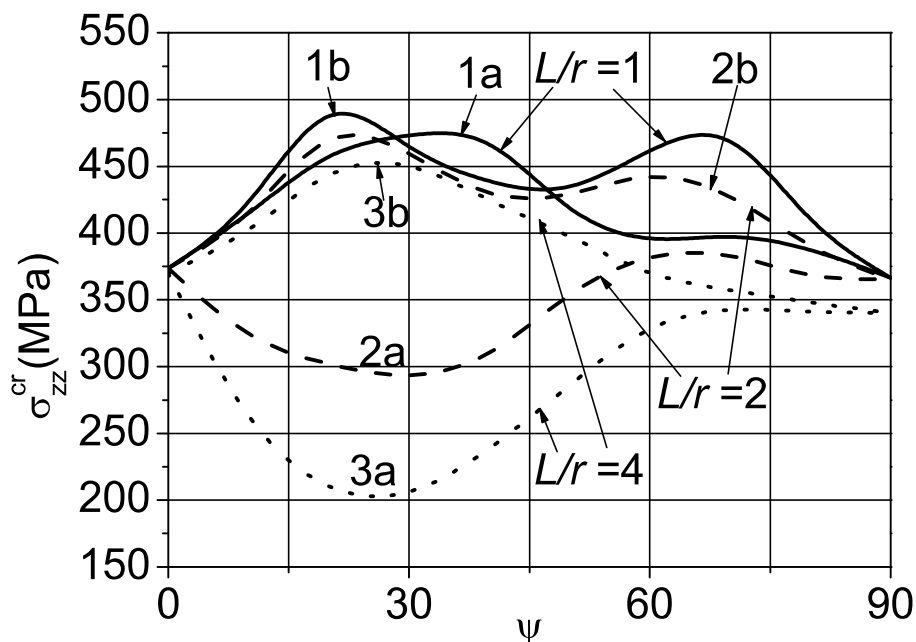


Рис. 2. Величини критичних напружень осьового тиску σ_{zz}^{cr} для оболонок з відношенням довжини до радіусу $L/r=1$ (1), $L/r=2$ (2), $L/r=4$ (3), з позначенням: а – одношарова, б – чотиришарова.

Аналіз кривих, представлених на рис. 2, вказує на те, що критичні значення стискаючих напружень циліндричної анізотропної оболонки залежать від довжини циліндра і кута повороту головних напрямків пружності шарів композитного матеріалу.

Так максимальна розбіжність між критичними значеннями однієї чотиришарової оболонки довжиною при $L/r=1$ (криві 1а, 1б) не перевищує 21%, відношенням $L/r=2$ (криві 2а, 2б) складає 60%, а при $L/r=4$ (криві 3а, 3б) досягає 122%. Також відмітимо, що зменшення довжини одношарової анізотропної циліндричної оболонки призводить до того, що критичні значення напружень σ_{zz}^{cr} в діапазоні зміни кута $20^\circ \leq \psi \leq 30^\circ$ найхарактерніше міняють свої значення. Так для відношення $L/r=4$ критичні напруження σ_{zz}^{cr} в цьому діапазоні менші від отриманих при $\psi = 0^\circ$ на 46% (крива 3а), для відношення $L/r=2$ (крива 2а) менші вже на 23%, а при $L/r=1$ (крива 1а) стають більшими на 24%.

Висновки. В роботі, спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, отримана в теорії пружності тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь стійкості в частинних похідних для анізотропної товстостінної циліндричної оболонки. Для приведення її до одновимірної було використано метод Бубнова-Гальоркіна, яким апроксимовано невідомі системи рівнянь вздовж твірної та врахована періодичність розв'язуючих функцій в коловому напрямку. Для розв'язку одновимірної задачі в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки було використано метод дискретної ортогоналізації.

Досліджено вплив на величини критичних осьових напружень анізотропної композитної товстостінної циліндричної оболонки відношення довжини до радіусу L/r , кількості її шарів при різних кутах повороту головних напрямків пружності однонапрявленого волокнистого матеріалу.

1. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
Vol'mir A. S. Ustoychivost' deformiruyemykh sistem. – М.: Nauka, 1967. – 984 s.

2. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2010. – 352 с.

Bazhenov V.A., Semenyuk M.P., Trach V.M. Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok: Monohrafiya. – К.: Karavela. – 2010. – 352 s.

3. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2019. – 274 с.

Trach V.M., Podvorniy A.V., Khoruzhyy M.M. Deformuvannya ta stiykist' netonkykh anizotropnykh obolonok: Monohrafiya. – К.: Karavela. – 2019. – 274 s.

4. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К.: Вища шк., 1986. – 511 с.

Guz' A.N. *Osnovy trekhmernooy teorii ustoychivosti deformiruyemykh tel.* – K.: Vishcha shk., 1986. – 511 s.

5. Гузь А.Н., Бабич И.Ю. *Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Т.4. Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел.* – K.: Nauk. dumka, 1985. – 280 c.

Guz' A.N., Babich I.YU. *Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. T.4. Trekhmernaya teoriya ustoychivosti deformiruyemykh tel.* – K. Nauk. dumka, 1985. – 280 s.

6. Podvorniy A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. *Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement // Int. Appl. Mech.* – 2017. – 53, N 6. P. 623 – 638.

7. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvorniy A.V. *Spatial Stability of Layered Anisotropic Cylindrical Shells Under Compressive Loads // Int. Appl. Mech.* – 2019. – 55, N 2. P. 211 – 221.

8. Trach V., Semenuk M., Podvorniy A. *Stability of anisotropic cylindrical shells in three-dimensional state under axial compression. Acta Sci. Pol. Arch.* 15. 4 (2016): 169-183.

9. Трач В.М., Подворний А.В., Бондарський О.Г. *Варіаційний принцип стосовно встановлення параметрів вільних коливань товстостінної пружної анізотропної циліндричної оболонки. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. Випуск 40. – НУВГП.- Рівне – 2021.- С. 191-208.*

Trach V.M., Podvorniy A.V., Bondars'kyu O.H. *Variatsiynyy pryntsyyp stosovno vstanovlennyya parametriv vil'nykh kolyvan' tovtostinnoyi pruzhnoyi anizotropnoyi tsylindrychnoyi obolonky. Resursoekonomni materialy, konstruktsiyi, budivli ta sporudy: Zbirnyk naukovykh prats'. Vypusk 40. – NUVHP.- Rivne – 2021.- S. 191-208.*

10. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности.* – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Vasidzu K. *Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti.* – М.: Mir, 1987. – 542 s.

11. Семенюк М.П., Трач В.М., Подворний А.В. *Варіаційний принцип Ху-Вас ідзу та напружено-деформований стан товстостінної анізотропної циліндричної оболонки // Прикладна механіка. Прийнято до видання.*

Semenyuk M.P., Trach V.M., Podvorniy A.V. *Variatsiynyy pryntsyyp Khu-Vasidzu ta napruzhenno-deformovanyu stan tovtostinnoyi anizotropnoyi tsylindrychnoyi obolonky // Prykladna mekhanika. Prynyyato do vydannya.*

12. Новожилов В.В. *Теория упругости.* – Л.: Судпромгиз, 1958. - 374 с.

Novozhilov V.V. *Teoriya uprugosti.* – L.: Sudpromgiz, 1958. - 374 s.

13. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Lekhnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela.* – 2-ye izd., ispr. i dop. – М.: Nauka, 1977. – 415 s.

14. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. *Задачи теории упругости неоднородных тел.* – K.: Nauk. dumka, 1991. – 216 с.

Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. *Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel.* – K.: Nauk. dumka, 1991. – 216 s.

15. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. *Using Spline Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthotropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness // Int. Appl. Mech.*- 2005. – 41, N4. – P.413-420.