

ВПЛИВ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНЬОГО ТИСКУ

EFFECT OF BOUNDARY CONDITIONS ON STRESS STATE OF COMPOSITE CYLINDRICAL SHELLS UNDER EXTERNAL PRESSURE

Трач В.М., д.т.н., проф., ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Хоружий М.М., к.т.н., ORCID ID: 0000-0002-4546-9270 (Національний університет водного господарства та природокористування)

Trach V.M., Doctor of Technical Sciences, Professor, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Khoruzhyi M.M., PhD., ORCID ID: 0000-0002-4546-9270 (National University of Water and Environmental Engineering)

Представлено підхід до розв'язання задачі про напружено-деформований стан нетонких анізотропних оболонок обертання із матеріалу, який має одну площину пружної симетрії. Визначено параметри напруженого стану циліндричної оболонки із вуглепластика, що знаходиться під дією зовнішнього тиску при різних умовах закріплення торців.

Composite materials are often used in the construction industry nowadays. Including such industries as construction of bridges and other transport structures. Today it is possible to produce from FRP not only separate bridge parts and single structural elements, but also entire span and basement structures made as a shell. Composite shells have a number of features that must be taken into account in the calculation and design.

Analyzing the latest achievements in mechanics of thin-walled structures, we can assert, that there is a large number of directions to study the stress state of composite shell structures. However, there are a lot of unsolved problems regarding the stress state of thick-walled anisotropic shells. It is generally well known that refined higher-order theories to calculate the stability of thick-walled anisotropic shells should be applied. The paper presents an approach to calculate the stress state of thick-walled anisotropic cylindrical shells using the refined Timoshenko beam theory. The above-mentioned constructions are made of materials having one plane of elastic symmetry. Parameters for a

nonlinear stress-strain state of the shell are established by using a system of ordinary non-uniform differential equations, taking into account the conditions of its fixation. The Newton-Kantorovich method is used to linearize nonlinear equations. The methods of the considered problems solutions are based on a numerical discrete orthogonalization by the Kutt-Merson method implemented in a software packages for PC.

The problem of calculating the stress state of composit cylindrical shell made of Carbon Fiber Reinforced Polymer (CFRP) under external pressure is analyzed in order to present the possibilities of the proposed method. Influences of fibrous composite stacking on magnitude of internal forces and moments for different boundary conditions of the shell are investigated.

Ключові слова: напруження, анізотропія, циліндр, оболонка, композит, stress, anisotropy, cylinder, shell, composite.

Вступ. В роботі [9] представлено підхід до розв'язання задачі про напружено-деформований стан циліндричної оболонки із вуглепластика, що знаходиться під дією *осьового* стиску при різних умовах закріплення торців. Композитні конструкції у вигляді оболонок, які сьогодні все частіше знаходять застосування у будівельній галузі [1-4], також можуть зазнавати дії і *зовнішнього* тиску.

Згідно [5, 9, 10] композитні оболонки відрізняються рядом особливостей, які повинні бути враховані при розрахунку і проектуванні. До їх переліку відносяться: анізотропія механічних властивостей, неоднорідність структури за товщиною, підвищена піддатливість до міжшарового зсуву тощо.

Аналіз останніх досліджень. Аналіз досягнень в галузі механіки композитних оболонок показує велику кількість напрямків, за якими відбувається процес дослідження таких конструкцій. Виготовлення оболонок обертання найчастіше пов'язане з використанням однонапрямлених композитів з яких можна утворити матеріал з однією площиною пружної симетрії.

Дослідження нелінійного напружено-деформованого стану, стійкості та закритичної поведінки *тонких* анізотропних оболонок із матеріалу, що має площину пружної симетрії детально представлено в монографії [5]. В роботі, на основі нелінійної теорії, що використовує гіпотези Кірхгофа-Лява, викладені методика розрахунку та результати дослідження *тонких* анізотропних оболонок обертання нульової, додатної та від'ємної гауссових кривин, що виготовлені з композитних матеріалів з однією площиною пружної симетрії.

В роботах [6-8] представлені результати експериментальних та чисельних

досліджень стійкості *тонких* циліндричних оболонок, що виготовлені із вуглепластику (CFRP – Carbon Fiber Reinforced Polymer). Чисельний аналіз отриманих даних реалізований на основі скінченноелементних моделей.

Проте, залишається ще досить значна кількість нез'ясованих питань щодо напружено-деформованого стану *нетонких* анізотропних оболонок. Розробка методики розрахунку параметрів нелінійного деформування *нетонких* оболонкових конструкцій, що виготовлених із матеріалу з однією площиною пружної симетрії, є актуальною задачею. Відомо, що для розрахунку таких конструкцій необхідно використовувати уточнені теорії [9, 10].

Постановка мети і задач досліджень. У роботі представлено підхід до розв'язання нелінійної задачі про напружено-деформований стан *нетонких* анізотропних оболонок, що виготовлені із матеріалу, який має одну площину пружної симетрії. За допомогою розробленої методики визначено параметри напруженого стану анізотропних циліндричних оболонок, що знаходяться під дією зовнішнього тиску при різних умовах закріплення торців.

Методика досліджень. В [10] представлено підхід до виведення системи канонічних рівнянь, яка описує осесиметричний напружено-деформований стан *нетонких* анізотропних оболонок на основі уточненої теорії, що спирається на гіпотези Тимошенка-Мідліна:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} &= b_{11}T_{11} + b_{12}T_{12} + b_{13}M_{11} + b_{14}M_{12} + b'_{11} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ &- b'_{11} \frac{w}{R_2} - b''_{11} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 - \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} &= b_{21}T_{11} + b_{22}T_{12} + b_{23}M_{11} + b_{24}M_{12} + b'_{21} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ &- b'_{21} \frac{w}{R_2} - b''_{21} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{v}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} &= b_{55}T_{13} + b'_{55}T_{23} - \frac{u}{R_1} - \theta_1; \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_1}{\partial \alpha_1} &= b_{31}T_{11} + b_{32}T_{12} + b_{33}M_{11} + b_{34}M_{12} + b'_{31} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\ &- b'_{31} \frac{w}{R_2} - b''_{31} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{1}{2} \theta_2^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_2}{\partial \alpha_1} &= b_{41} T_{11} + b_{42} T_{12} + b_{43} M_{11} + b_{44} M_{12} + b'_{41} \frac{u}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} - \\
&- b'_{41} \frac{w}{R_2} - b''_{41} \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_1 + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{A_2} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{22} - \frac{1}{R_1} T_{13} - q_1; \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} T_{12}^* - \frac{1}{R_2} T_{23}; \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial T_{13}}{\partial \alpha_1} &= -\frac{1}{R_1} T_{11} - \frac{1}{R_2} T_{22} - q_3; \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{22} + T_{13} + T_{11} \theta_1; \\
\frac{1}{A_1} \frac{\partial M_{12}^*}{\partial \alpha_1} &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} M_{12}^* - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} M_{11} - T_{23} + T_{22} \theta_2. \quad (1)
\end{aligned}$$

Тут, A_1, A_2 – параметри Ляме, коефіцієнти першої квадратичної форми координатної поверхні; α_1, α_2 – система координат; u, v, w – переміщення серединної поверхні оболонки, θ_α ($\alpha=1,2$) – кути повороту відносно нормальних до поверхні осей координат; T_{ij} ($i=1,2; j=1,2,3$), M_{ij} ($i, j=1,2$) – зусилля та моменти, що діють в перерізах оболонки; $b_{ij}, b'_{ij}, b''_{ij}$ ($i, j=1,2...5$) – елементи матриці жорсткості; q_i ($i=1,2,3$) – компоненти навантаження.

Для розв'язання нелінійної задачі про напружено-деформований стан анізотропних циліндричних оболонок при дії зовнішнього тиску виконана лінеаризація нелінійних рівнянь рівноваги (1) методом Ньютона-Канторовича [5, 10]. Розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь реалізований за використання чисельного методу дискретної ортогоналізації, що базується на методі Кутта-Мерсона з ортогоналізацією векторів розв'язків в окремих точках, у вигляді програмного комплексу для ПК.

Результати досліджень. За допомогою розробленої методики визначимо параметри напруженого стану 4-х шарової композитної циліндричної оболонки (рис. 1), під дією зовнішнього рівномірного тиску при різних умовах закріплення торців.

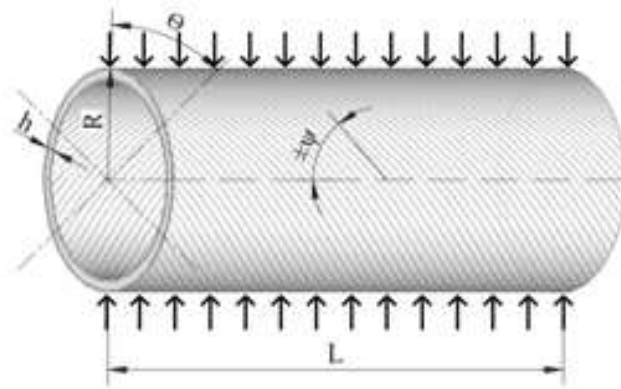


Рис. 1. Циліндрична оболонка під дією зовнішнього бокового тиску

Геометричні характеристики оболонки:

$R=200$ мм, $L=400$ мм, $h=20$ мм ($L/R=2$, $h/R=1/10$).

Матеріал, з якого виготовлена оболонка – вуглепластик. Механічні характеристики композиту [7]:

$E_{11}=150$ ГПа, $E_{12}=9,08$ ГПа, $G_{12}=G_{13}=5,29$ ГПа, $G_{23}=3,41$ ГПа, $\nu_{12}=0,32$.

Визначення параметрів напруженого стану проводимуться для 4-х шарової оболонки із двома варіантами укладання волокнистого композиту за товщиною (рис. 2):

- варіант 1 – $[+45^\circ/-45^\circ] / [+45^\circ/-45^\circ]$;
- варіант 2 – $[+45^\circ/-45^\circ] / [-45^\circ/+45^\circ]$.

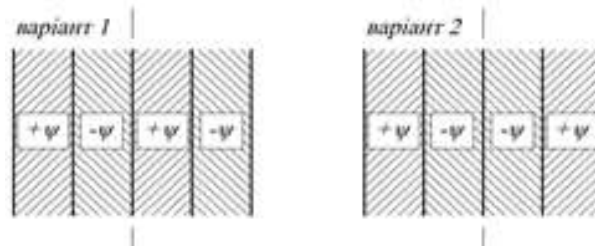


Рис. 2. Варіанти укладання волокнистого композиту за товщиною оболонки

При проведенні розрахунків розглядалась оболонка при 4-х різних типах граничних умов (рис.3):

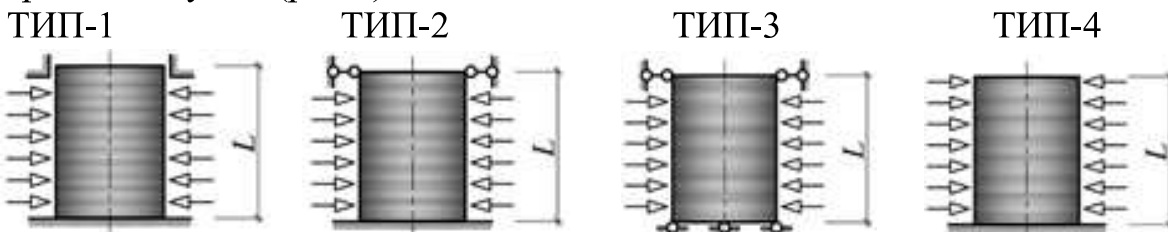


Рис. 3. Типи закріплення торців оболонки

ТИП-1:

- при $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$: торець жорстко затиснений ($u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$);

- при $\alpha_1 = \alpha_{1,L}$: торець жорстко затиснений ($T_{11} = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$).

ТИП-2:

- при $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$: торець жорстко затиснений ($u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$);
- при $\alpha_1 = \alpha_{1,L}$: торець шарнірно-рухомий ($T_{11} = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$).

ТИП-3:

- при $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$: торець шарнірно-нерухомий ($u = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$);
- при $\alpha_1 = \alpha_{1,L}$: торець шарнірно-рухомий ($T_{11} = v = w = M_{11} = M_{12} = 0$).

ТИП-4:

- при $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$: торець жорстко затиснений ($u = v = w = \theta_1 = \theta_2 = 0$);
- при $\alpha_1 = \alpha_{1,L}$: торець вільний ($T_{11} = T_{12} = T_{13} = M_{11} = M_{12} = 0$).

На рис. 4-8 наведені графіки в осях: зусилля – довжина твірної циліндра L . Криві за номерами 1-4 описують наявні в напруженому стані анізотропної оболонки зусилля отримані для граничних умов ТИП-1...ТИП-4 відповідно при першому варіанті укладання волокнистого композиту за товщиною оболонки. Криві 5-8 відображають ті ж зусилля, тільки для другого варіанту композиту.

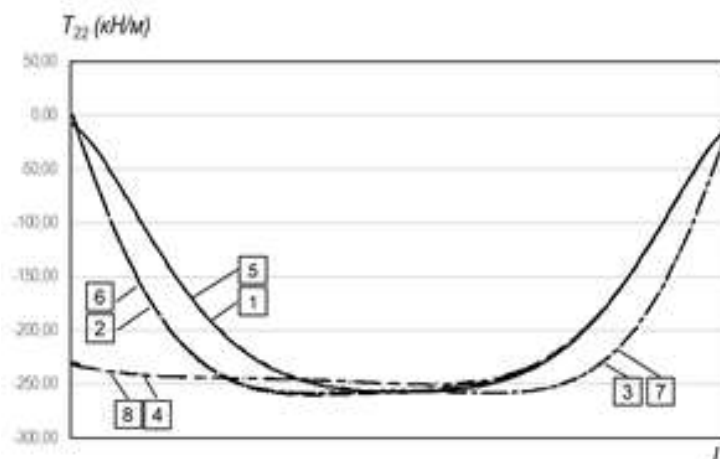


Рис. 4. Розподіл колесних зусиль T_{22} (кН/м)

Зображені на рис. 4 графічні залежності дозволяють зробити наступні висновки. При зовнішньому тиску колесні зусилля T_{22} в оболонках із граничними умовами ТИП-1 найбільших значень досягають для координати твірної $x/L \approx 0,5$, ТИП-2 – $x/L \approx 0,35$, ТИП-3 – $x/L \approx 0,35$ та $x/L \approx 0,65$, ТИП-4 – $x/L \approx 0,5$. Як показують розрахунки, варіанти укладання композитних шарів за товщиною оболонки суттєво не впливають на величину і характер розподілу зусиль T_{22} . Із аналізу графіків на рис. 4 видно, що при зовнішньому тиску, незалежно від умов закріплення, для координати твірної циліндра $x/L \approx 0,5$ виникають колесні зусилля, які близькі за величиною.

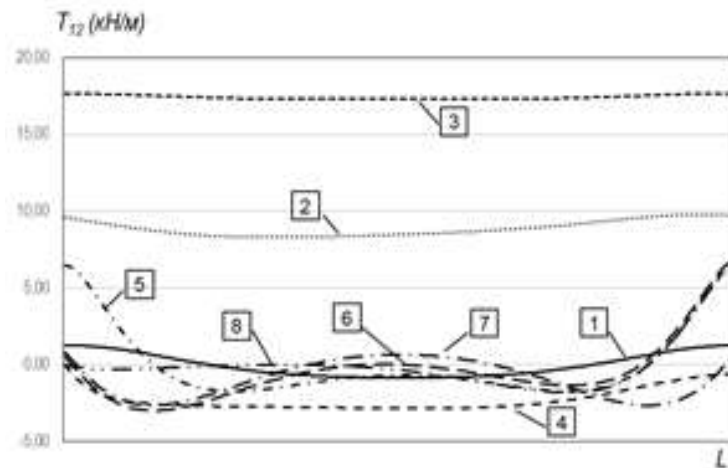


Рис. 5. Розподіл зсувних зусиль T_{12} (кН/м)

Аналіз кривих на рис.5 показав суттєвий вплив розташування шарів намотки на величину зсувних зусиль T_{12} в 4-х шаровій циліндричній оболонці при зовнішньому тиску. Особливо це помітно для оболонок із умовами закріплення торців ТИП-2 (крива 2) та ТИП-3 (крива 3). Влаштування композиту за варіантом 2 у порівнянні із варіантом 1 у таких конструкціях приводить до зменшення максимальних зсувних зусиль T_{12} до 31% для умов закріплення ТИП-2 і до 85% для ТИП-3. В оболонках із граничними умовами ТИП-1 і ТИП-4 укладання композитних шарів за другим варіантом приводить до збільшення зсувних зусиль T_{12} в жорсткому затисненні в 5 разів для ТИП-1 (крива 5) і 10 разів для ТИП-2 (крива 8) у порівнянні із першим варіантом (криві 1 і 4 відповідно).

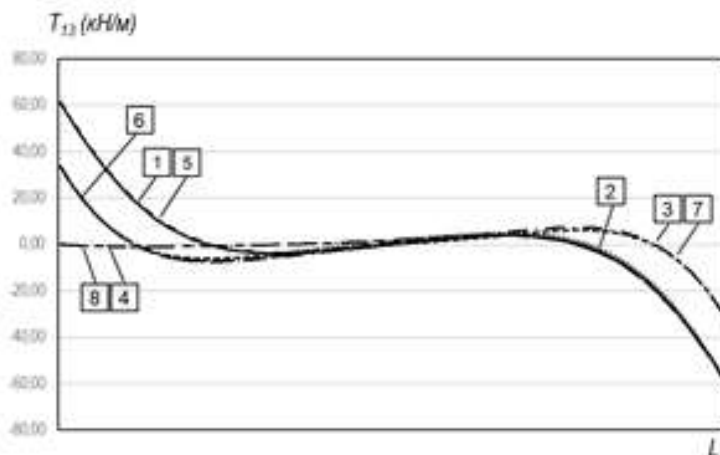


Рис. 6. Розподіл поперечних зусиль T_{13} (кН/м)

Із аналізу графіків на рис. 6 видно, що розподіл поперечних зусиль T_{13} в циліндричній оболонці від зовнішнього тиску носить кососиметричний характер. Найбільших значень T_{13} набувають в опорних краях оболонки. Як і для колових зусиль T_{22} , розташування шарів намотки суттєво не впливають на величину і характер розподілу зусиль поперечних зусиль T_{13} .

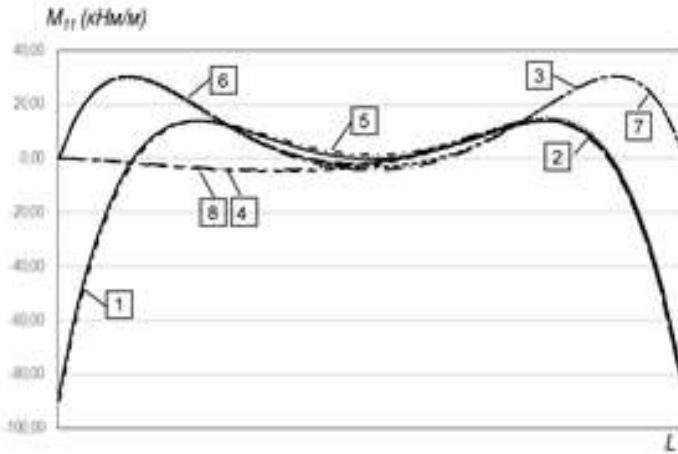


Рис. 7. Розподіл меридіональних моментів M_{11} (кНм/м)

Аналіз графіків рис.7 показує, що при зовнішньому тиску максимальні меридіональні моменти M_{11} в оболонках із умовами закріплення торців ТИП-1, ТИП-2 і ТИП-4 виникають в жорсткому затисненні, а в циліндрах із граничними умовами ТИП-3 – для значень координати твірної $x/L \approx 0,125$; $0,875$ (криві 3, 7). Як показують розрахунки, величини моментів M_{11} , що отримані для різних варіантів укладання композитних шарів, є, практично, однаковими.

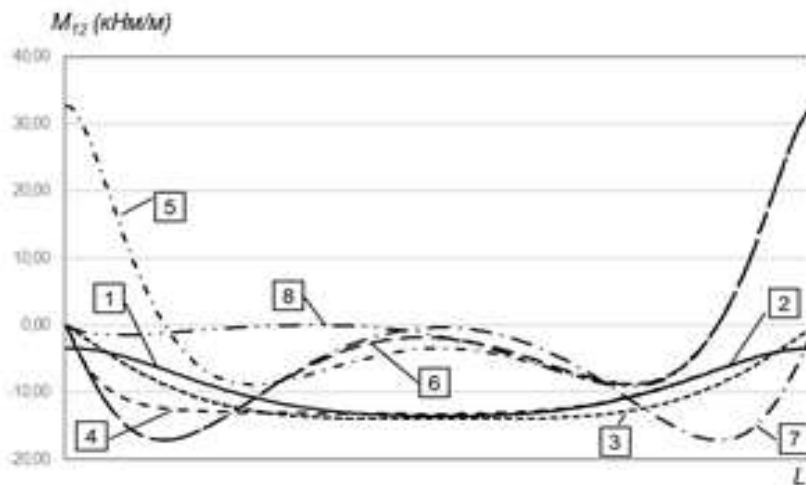


Рис. 8. Розподіл крутних моментів M_{12} (кНм/м)

Аналіз кривих на рис.8 показав суттєвий вплив розташування шарів композиту на величину крутних моментів M_{12} в 4-х шаровій циліндричній оболонці при зовнішньому тиску. Влаштування композиту за варіантом 2 у порівнянні із варіантом 1 у таких конструкціях приводить до збільшення максимальних значень моментів M_{12} до 59% для умов закріплення ТИП-1, ТИП-2, ТИП-4, і до 18 % для граничних умов ТИП-3. В оболонках із граничними умовами ТИП-1 і ТИП-4 укладання композитних шарів за

другим варіантом приводить до збільшення крутних моментів M_{12} в жорсткому затисненні в 9,6 разів для ТИП-1 (крива 5) і ТИП-2 (крива 8) у порівнянні із першим варіантом (криві 1 і 4 відповідно).

Висновки. Як при осьовому навантаженню [9], так і від дії зовнішнього тиску напружено-деформований стан анізотропної циліндричної оболонки також є несиметричним. Підтвердженням цього є наявність в напруженому стані композитної оболонки зсувних зусиль T_{12} і моментів кручення M_{12} . Також, слід відмітити характерні для нетонких оболонок поперечні зусилля T_{13} , які досягають до 23% у відношенні то колових зусиль T_{22} при граничних умовах ТИП-1, ТИП-2, ТИП-4 і 13% для конструкцій із умовами закріплень торців ТИП-3.

Як показують розрахунки, різні варіанти розташування шарів композиту мають суттєвий вплив тільки на величину і характер розподілу зсувних зусиль T_{12} і крутних моментів M_{12} .

1. Meier U. Carbon Fiber-Reinforced Polymers: Modern Materials in Bridge Engineering. Structural Engineering International. 1992, 2, pp. 7-12.

2. Meier U., R. Brönnimann, P. Anderegg, in J. G. Teng, J. G. Dai (Eds.). Proceedings of the Eighth International Conference on Fibre-Reinforced Polymer (FRP). Composites in Civil Engineering (CICE). 2016, 1069-1074.

3. X. Volmer. Creating architecture with CFRC. Introducing carbon fibre composite as structural material: master thesis. Delft, 2015, pp.1–19.

4. R. Sonnenschein, K. Gajdosova, I. Holly. FRP Composites and their Using in the Construction of Bridges, Procedia Engineering. 2016, 161, pp. 477-482.

5. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок. К.: Каравела, 2010. 352 с.

V.A. Bazhenov, M.P. Semeniuk, V.M. Trach. Nelineiine deformuvannia, stiiikist i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok. Kyiv: Karavela, 2010.

6. H.N.R. Wagner, C. Hühne, S. Niemann, R. Khakimova. Robust design criterion for axially loaded cylindrical shells – Simulation and validation. Thin-Walled Struct. 2017, 115, pp. 154–162

7. C. Bisagni. Composite cylindrical shells under static and dynamic axial loading: An experimental campaign. Progress in Aerospace Sciences, 2015, 78, pp. 107–115.

8. F. Franzoni, F. Odermann, E. Labans, C. Bisagni, M. A. Arbelo, R. Degenhardt. Experimental validation of the vibration correlation technique robustness to predict buckling of unstiffened composite cylindrical shells. Composite Structures, 2019, 224, 111107.

9. В.М. Трач, М.М. Хоружий. Вплив граничних умов на напружений стан циліндричних оболонок із композитів під дією осьового стиску. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. Збірник наукових праць. 2022. 41, С.235-243.

V.M. Trach, M.M. Khoruzhyi. Vplyv hranychnykh umov na napruzhenyi stan tsylindrychnykh obolonok iz kompozytiv pid diieiu osovoho stysku. Resursoekonomni materialy, konstruktsii, budivli ta sporudy. Zbirnyk naukovykh prats. 2022. 41, pp. 235–243

10. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М.М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: монографія. К.: Каравела, 2019. 274 с.

V.M. Trach, A.V. Podvornyi, M.M. Khoruzhyi. Deformuvannia ta stiiikist netonkykh anizotropnykh obolonok. Kyiv: Karavela, 2019.