

## **ДОСЛІДЖЕННЯ РОБОТИ ТА РОЗРАХУНОК ЕЛЕМЕНТІВ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

**УДК 624.012.25**

**РОЗРАХУНОК НЕРОЗРІЗНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК ІЗ  
ДОДАТКОВИМ ДИСПЕРСНИМ АРМУВАННЯМ СТАЛЕВОЮ  
ФІБРОЮ З УРАХУВАННЯМ ПЕРЕРЕЗПОДІЛУ ЗУСИЛЬ**

**CALCULATION OF CONTINUOUS REINFORCED CONCRETE BEAMS  
WITH ADDITIONAL DISPERSED REINFORCING BY STEEL FIBERS,  
TAKING INO ACCOUNT THE REDISTRIBUTION OF FORCES**

**Андрійчук О.В., к.т.н., доцент (ORCID 0000-0002-6275-097X),  
Нінічук М.В., технік I категорії (ORCID 0000-0001-6018-5615),  
(Луцький національний технічний університет, м. Луцьк).**

**Andriichuk O.V., Ph.D., associate professor (ORCID 0000-0002-6275-097X),  
Ninichuk M., techn. of the I category (ORCID 0000-0001-6018-5615) (Lutsk  
State Technical University, Lutsk).**

**У праці запропоновано використання вдосконаленої методики  
визначення величини згинальних моментів у нерозрізних комбіновано-  
армованих балках із урахування перерозподілу зусиль.**

**A special place in the study and improvement of the work and calculation of  
reinforced concrete structures is occupied by statically indeterminate  
structures, in particular inseparable multi-span beams.**

**A characteristic feature of the continuous beams is the redistribution of forces  
in the sections, which is often characterized even at the operational levels of  
the load. As the load increases, the reinforced concrete structures develop  
significant inelastic deformations caused by the occurrence and development  
of cracks in the stretched zone, violation of the adhesion of reinforcement to  
concrete, the creep of concrete.**

**The problem of the described redistribution of forces in statically  
indeterminate reinforced concrete structures is currently widely disclosed,  
considerable laboratory and practical experience has been accumulated.  
However, this applies to structures with classical reinforcement. Today, the  
use of dispersed reinforcement, in particular steel fiber concrete, as well as  
combined reinforcement, is becoming more and more relevant. In order to  
study the effect of such reinforcement on the redistribution of forces in  
combined-reinforced statically indeterminate structures and their stress-**

strain state, a number of experimental studies of two-span continuous reinforced concrete beams with additional dispersed reinforcement were performed. The research results showed significant differences in the operation of combined-reinforced beams under single loads, compared with classical structures. Therefore, the question arose about improving the method of calculating beams of this type.

The article presents the disadvantages of using the existing method in the calculation of continuous beams with combined reinforcement. An improved method for determining the magnitude of bending moments in inseparable combined-reinforced beams, taking into account the redistribution of forces with good convergence, based on experimental studies, is also proposed. A statistical comparison of the obtained theoretical results with experimental data is performed.

**Ключові слова:**

Балка, сталеві фібробетон, фібра, перерозподіл, розрахунок.

Beam, steel fiber reinforced concrete, fiber, redistribution, calculation.

**Стан питання та задачі дослідження.** Особливе місце в дослідженні та удосконаленні роботи і розрахунку залізобетонних конструкцій займають статично-невизначені конструкції, зокрема нерозрізні багатопролітні балки. Характерною особливістю роботи нерозрізних балок є перерозподіл зусиль в їх перерізах, який досить часто є характерно вираженим навіть на експлуатаційних рівнях навантаження. Зі збільшенням діючого навантаження, розвиваються суттєві непружні деформації, викликані розвитком тріщин у розтягнутій зоні, порушенням зчеплення арматури з бетоном, повзучістю бетону. Вони призводять до значного перерозподілу напружень у перерізах конструкцій [1, 2].

Проблема описаного перерозподілу зусиль в статично-невизначених конструкціях на даний час розкрита доволі широко, накопичений значний лабораторний та практичний досвід. Однак це стосується конструкцій із класичним армуванням. Сьогодні все більш актуальним є застосування у будівництві дисперсного армування, зокрема сталеві фібробетону, а також комбінованого армування [3, 4, 5, 6]. Для вивчення впливу такого армування на перерозподіл зусиль у статично-невизначених конструкціях, та їх напружено-деформований стан, було проведено ряд авторських експериментальних досліджень роботи двопролітних нерозрізних комбіновано-армованих балок. Методика та результати цих досліджень детально описані у роботах [7, 7]. Також ставилося за мету розробити методику розрахунку таких балок із врахуванням перерозподілу зусиль.

При розрахунку класичних нерозрізних балок із врахуванням перерозподілу, застосовується наближений метод визначення згинальних моментів при різних рівнях навантаження [8, 9]. Він базується на

передбаченні, що після виникнення тріщин у найбільш напружених опорних і прольотних перерізах, їхня жорсткість починає зменшуватися майже до мінімуму. Ця зміна має лінійний характер – для опорного та для прольотного перерізів, і передбачає повне вирівнювання величини згинальних моментів при руйнуванні. Математичні вирази методу, який можна назвати інтерполяційним, мають наступний вигляд:

до утворення тріщин – за розрахунками пружної системи:

$$M_p = M_{p,el} \quad (1)$$

після їх, утворення – по інтерполяції:

$$M_p = M_{crc} + \frac{M_{u,pl} - M_{crc}}{M_{u,el} - M_{crc}} (M_{p,el} - M_{crc}), \quad (2)$$

де  $M_p$  – згинальний момент, який виникає в перерізах балок при навантаженні  $F$  із урахуванням перерозподілу зусиль;

$M_{crc}$  – момент утворення тріщин;

$M_{u,el}$  і  $M_{u,pl}$  – граничні моменти, визначені відповідно за умови пружної роботи балок із урахуванням перерозподілу зусиль;

$M_{p,el}$  – згинальний момент при дії навантаження  $F$  за пружної роботи балки.

Для прийнятої в наших експериментальних дослідженнях, схеми випробування двопролітних нерозрізних балок [7], значення моментів від заданої зосередженої в середині прольоту сили  $F$  за умов пружної роботи можна визначити за наступними виразами:

опорний:

$$M_{sup,el} = 0,279Fl, \quad (3)$$

прольотний:

$$M_{sp,el} = 0,11Fl. \quad (4)$$

Опорні і прольотні моменти з урахуванням їх повного перерозподілу, при заданому навантаженні  $F$  визначаються за формулою:

$$M_{sup,pl} = M_{sp,pl} = 0,167Fl. \quad (5)$$

Момент тріщиноутворення для елементів із одиничним армуванням, визначається виходячи із умови, що перед утворенням тріщин у крайньому розтягнутому волокні бетону деформації розтягу досягають граничних значень ( $\varepsilon_{ct,1}$ ). Виходячи із гіпотези плоских перерізів, деформації крайнього стиснутого волокна дорівнюватимуть:

$$\varepsilon_{c(1)} = \frac{\varepsilon_{ct,1}}{h - x_{(1)}} x_{(1)}. \quad (6)$$

Деформації в арматурі визначаються за виразом:

$$\varepsilon_{s(1)} = \frac{\varepsilon_{ct,1}}{h - x_{(1)}} (h - a) . \quad (7)$$

На підставі прийнятих передумов, момент тріщиноутворення для комбіновано-армованих згинальних елементів  $M_{crc}$  згідно методики описаної у роботі [10] можна визначити за наступною формулою:

$$M_{crc} = f_{cd} b x_{(1)}^2 \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} \left( \frac{\varepsilon_{c(1)}}{\varepsilon_{c,1}} \right)^k + f_{ctd} b (h - x_{(1)})^2 \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{k+2} + A_s E_s \frac{\varepsilon_{c(1)}}{x_{(1)}} (d - x_{(1)})^2 . \quad (8)$$

Основним недоліком описаного методу є те, що він передбачає прямо пропорційну залежність згинального моменту від діючого навантаження, однак в дійсності ця залежність носить нелінійний характер. У випадку із залізобетонними балками із додатковим дисперсним армуванням по всьому об'єму, результати експериментальних досліджень, що описані у роботах [7, 7, 10], вказують на значно менше виражений перерозподіл зусиль за рахунок тріщиноутворення, в порівнянні з типовими залізобетонними балками. Тому в більшій половині діапазону навантаження нерозрізних балок, спостерігається характер роботи дуже близький до пружної стадії. На рисунку 1 зображено порівняння характеру зміни згинальних моментів отриманих в результаті експериментальних досліджень роботи балок другої серії 2Б1, та визначених по формулі (2).

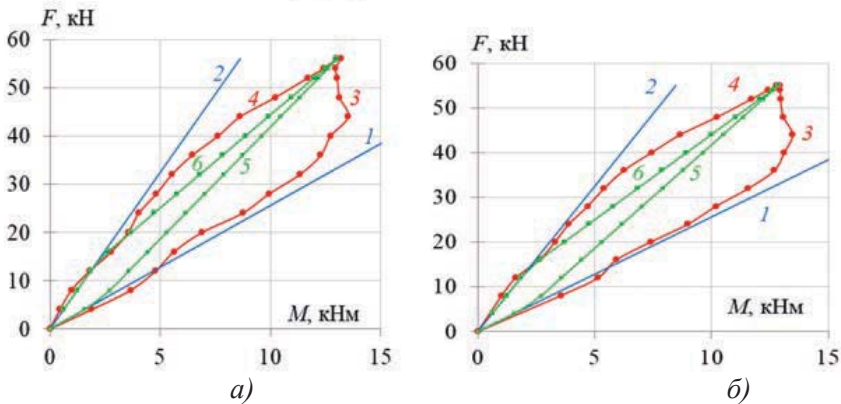


Рис. 1. Порівняння характеру зміни згинальних моментів у процесі навантаження балки 2Б1-1 (а) та 2Б1-2(б): 1 – теоретичні значення згинальних моментів на опорі в пружній стадії; 2 – те саме в прольотах; 3 – експериментальні значення моментів на опорі; 4 – те саме в прольотах; 5 – значення моментів на опорі визначені за (2); 6 – те саме в прольотах

Згідно графіків, значення експериментальних згинальних моментів залишаються близькими до пружної стадії – до рівня навантаження приблизно  $0,58...0,6F_u$ . Відношення експериментального моменту до теоретичного на цьому рівні є максимальним і становить в середньому для дослідних балок  $M_{sup,exp}/M_{sup,th} = 1,45$  для опорного, та  $M_{sp,exp}/M_{sp,th} = 0,8$  для прольотного моментів.

Очевидно, що визначення проміжних величин згинальних моментів із врахуванням перерозподілу зусиль для нерозрізних комбіновано-армованих балок із дисперсним армуванням за допомогою вищеописаної методики, дає результати дуже віддалені від реальних значень. Тому є доцільним врахування у формулі, для кожного ступеня навантаження, коефіцієнта відхилення  $k_{el}$ , який би враховував більш пружну роботу комбіновано-армованих нерозрізних балок.

Рівняння (2) тоді набуде наступного вигляду:

$$M_{p,sup} = M_{crc} + \frac{M_{u,pl} - M_{crc}}{M_{u,el} - M_{crc}} (M_{p,el} - M_{crc}) k_{el} \quad (9)$$

$$M_{p,sp} = M_{crc} + \frac{M_{u,pl} - M_{crc}}{M_{u,el} - M_{crc}} (M_{p,el} - M_{crc}) \left( \frac{1}{k_{el}} \right); \quad (10)$$

де  $M_{p,sup}$  і  $M_{p,sp}$  – опорний і прольотний згинальні моменти що виникають в перерізах комбіновано-армованих нерозрізних балок при навантаженні  $F$  із урахуванням перерозподілу зусиль.

Із цією метою, на основі середніх значень для балок 2Б1, була побудована крива залежності відношення  $M_{exp}/M_{th}$  від рівня навантаження (рис. 2).

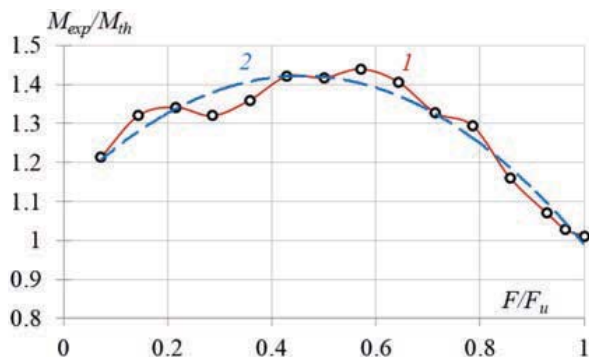


Рис. 2 – Залежність відношення  $M_{exp}/M_{th}$  від рівня навантаження для балок 2Б1: 1 – експериментальні усереднені значення;

2 – залежність отримана апроксимацією за допомогою поліноміальної функції

Апроксимація цієї кривої за допомогою поліноміальної функції, дозволила встановити залежність, яку можна описати наступним рівнянням:

$$y = 1 + 1,3x - 1,3x^2; \quad (11)$$

де  $y$  – відношення експериментальних згинальних моментів до теоретичних, що визначені інтерполяційним методом;

$x$  – відносний рівень навантаження балки.

У кінцевому варіанті формула для визначення коефіцієнта відхилення набуде наступного вигляду:

$$k_{el} = 1 + 1,3 \left( \frac{M_{p,el}}{M_{u,el}} \right) - 1,3 \left( \frac{M_{p,el}}{M_{u,el}} \right)^2. \quad (12)$$

Підставивши отриманий вираз у рівняння (9) та (10) отримаємо уточнені формули для визначення величини згинальних моментів для комбіновано-армованих балок із урахуванням перерозподілу зусиль:

$$M_{p,sup} = M_{crc} + \frac{M_{u,pl} - M_{crc}}{M_{u,el} - M_{crc}} (M_{p,el} - M_{crc}) \left( 1 + 1,3 \left( \frac{M_{p,el}}{M_{u,el}} \right) - 1,3 \left( \frac{M_{p,el}}{M_{u,el}} \right)^2 \right); \quad (13)$$

$$M_{p,sp} = M_{crc} + \frac{M_{u,pl} - M_{crc}}{M_{u,el} - M_{crc}} (M_{p,el} - M_{crc}) \left( 1 + 1,3 \left( \frac{M_{p,el}}{M_{u,el}} \right) - 1,3 \left( \frac{M_{p,el}}{M_{u,el}} \right)^2 \right)^{-1}; \quad (14)$$

Відношення теоретичних значень згинальних моментів визначених за формулами (13) та (14) для балок 2Б1 знаходяться в межах  $M_{th}/M_{exp} = 0,83 \dots 1,03$  для прольотних та  $M_{th}/M_{exp} = 1,27 \dots 0,99$  для опорних перерізів (табл. 1). Порівняння характеру зміни теоретичних і експериментальних значень у процесі навантаження зображено на рисунку 3.

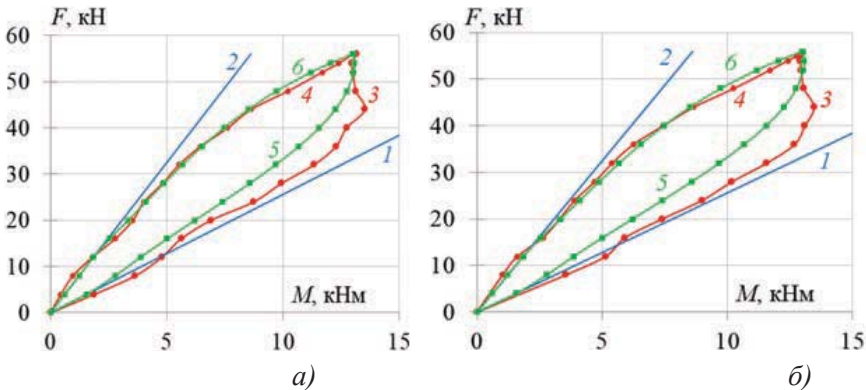


Рис. 3 – Порівняння характеру зміни згинальних моментів у процесі навантаження балки 2Б2-1 (а) та 2Б2-2(б):

- 1 – теоретичні значення згинальних моментів на опорі в пружній стадії;
- 2 – те саме в прольотах; 3 – експериментальні значення моментів на опорі;
- 4 – те саме в прольотах; 5 – значення моментів на опорі визначені за (13); 6 – значення моментів у прольотах визначені за (14)

Таблиця 1

Експериментальні та теоретичні значення згинальних моментів, кН\*м,  
визначених за формулами (13 і 14), в балках 2Б1

F, кН	Опора			Прольоти		
	$M_{sup,exp}$	$M_{sup,th}$	$M_{sup,exp}/M_{sup,th}$	$M_{sp,exp}$	$M_{sp,th}$	$M_{sp,exp}/M_{sp,th}$
Балка 2Б1-1						
8	3.66	2.79	1.26	0.97	1.23	0.85
16	5.63	5.02	1.12	2.79	2.55	1.09
20	6.90	6.22	1.11	3.55	3.34	1.06
24	8.75	7.41	1.18	4.03	4.11	0.98
28	9.94	8.58	1.16	4.83	4.88	0.99
32	11.34	9.68	1.17	5.53	5.68	0.97
36	12.29	10.69	1.15	6.46	6.53	0.99
40	12.74	11.56	1.10	7.63	7.46	1.02
44	13.54	12.27	1.10	8.63	8.52	1.01
48	13.14	12.77	1.03	10.23	9.73	1.05
52	13.03	13.04	1.00	11.68	11.19	1.04
54	12.96	13.08	0.99	12.42	12.05	1.03
2Б1-2						
8	3.55	2.79	1.27	1.02	1.23	0.83
16	5.93	5.02	1.18	2.64	2.55	1.03
20	7.40	6.21	1.19	3.30	3.34	0.99
24	9.00	7.40	1.22	3.90	4.11	0.95
28	10.19	8.56	1.19	4.70	4.88	0.96
32	11.58	9.65	1.20	5.41	5.69	0.95
36	12.70	10.63	1.19	6.25	6.55	0.95
40	13.12	11.47	1.14	7.44	7.50	0.99
44	13.48	12.14	1.11	8.66	8.57	1.01
48	13.08	12.60	1.04	10.26	9.83	1.04
52	12.95	12.81	1.01	11.72	11.36	1.03
54	12.94	12.82	1.01	12.43	12.26	1.01

Середнє значення похибки в цьому випадку становить  $\bar{X} = 8,1\%$  при середньоквадратичному відхиленні  $\sigma = 6,8\%$ , що свідчить про задовільну збіжність отриманих результатів та ефективність запропонованої методики.

**Висновки.** На основі отриманих результатів при визначенні характеристик напружено-деформованого стану, запропонована удосконалена методика визначення величини згинальних моментів у

нерозрізних комбіновано-армованих балках із урахування перерозподілу зусиль.

Середнє значення похибки становить  $\bar{X} = 8,1\%$  при середньо-квадратичному відхиленні  $\sigma = 6,8\%$ .

1. Крылов С. М., Икрамов С. Д. К вопросу о расчете железобетонных неразрезных балок с учетом перераспределения усилий. *Исследования по теории железобетона* : Труды НИИЖБ. 1960. Вып. 17. С. 154–177.

Krylov S. M., Ikramov S. D. K voprosu o raschete zhelezobetonnykh nerazreznykh balok s uchetom pereraspredeleniya usilii. *Issledovaniya po teorii zhelezobetona* : Trudy NIIZhB. 1960. Vyp. 17. S. 154–177.

2. ДСТУ Б В.2.6.-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції з важкого бетону. Правила проектування. [Чинний від 2011-06-01]. Київ, 2011. – с. 123. (Державний стандарт України).

DSTU B V.2.6.-156:2010. Betonni ta zalizobetonni konstruktсии z vazhkoho betonu. Pravyla proektuvannia. [Chynnyi vid 2011-06-01]. Kyiv, 2011. – s. 123. (Derzhavnyi standart Ukrainy).

3. Бабич Є.М., Андрійчук О.В. Проектування та виготовлення безнапірних труб із сталевібробетону. Рекомендації. – Луцьк . ЛНТУ, 2012. – С. 32.

Babych Ye.M., Andriichuk O.V. Proektuvannia ta vyhotovlennia beznapirnykh trub iz stalefibrobetonu. Rekomendatsii. – Lutsk . LNTU, 2012. – S. 32.

4. Андрійчук О.В., Ясюк І.М. Виготовлення придорожніх лотків водовідводу зі сталевібробетону. *Наукові нотатки: збірник наукових праць*. 2014. Вип. 45. С. 7-14.

Andriichuk O.V., Yasiuk I.M. Vyhotovlennia prydorozhnykh lotkiv vodovidvodu zi stalefibrobetonu. *Naukovi notatky: zbirnyk naukovykh prats*. 2014. Vyp. 45. S. 7-14.

5. ДСТУ-Н В В.2.6-218:2016. Настанова з проектування та виготовлення конструкцій із дисперсно-армованого бетону. [Чинний від 2017-04-01]. Київ, 2017. 32 с. (Державний стандарт України).

DSTU-N B V.2.6-218:2016. Nastanova z proektuvannia ta vyhotovlennia konstruktсии iz dyspersno-armovanoho betonu. [Chynnyi vid 2017-04-01]. Kyiv, 2017. 32 s. (Derzhavnyi standart Ukrainy).

6. Mondal P., Singha Roy D.K. Strengthening of reinforced concrete beam using steel fiber at different depth of the beam. *IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2015. Vol. 04. P. 165–175.

Mondal P., Singha Roy D.K. Strengthening of reinforced concrete beam using steel fiber at different depth of the beam. *IJRET: International Journal of Research in Engineering and Technology*. 2015. Vol. 04. P. 165–175.

7. Нінічук М.В. Вплив способу армування сталевими фібрами нерозрізних залізобетонних балок на їх напружено-деформований стан. *Ресурсоекономі матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2015. Вип. 31. С. 460-467.

Ninichuk M. V. Vplyv sposobu armuvannia stalevymy fibramy nerozriznykh zalizobetonnykh balok na yikh napruzhenno-deformovanyi stan. *Resursoekonomni materialy, konstruktсии, budivli ta sporudy*. 2015. Vyp. 31. S. 460-467.

1. V. Experimental Research of Strength Characteristics of Continuous Reinforced Concrete Beams with Combined Reinforcement, and Modelling Their Work by the Finite Element Method. *Proceedings of EcoComfort 2020. Lecture Notes in Civil Engineering*.



2020. Vol. 100. P. 18–25. DOI: 10.1007/978-3-030-57340-9\_3 (Scopus).

Babych Y. M., Andriichuk O. V., Kysliuk D. Y., Ninichuk M. V. Experimental Research of Strength Characteristics of Continuous Reinforced Concrete Beams with Combined Reinforcement, and Modelling Their Work by the Finite Element Method. *Proceedings of EcoComfort 2020. Lecture Notes in Civil Engineering*. 2020. Vol. 100. P. 18–25. DOI: 10.1007/978-3-030-57340-9\_3 (Scopus).

**8.** Бабич Є. М., Бабич В. Є., Савицький В. В. Розрахунок нерозрізних залізобетонних балок із використанням деформаційної моделі: рекомендації. Рівне : НУВГП, 2018. 34 с.

Babych Ye. M., Babych V. Ye., Savytskyi V. V. Rozrakhunok nerozriznykh zalizobetonnykh balok iz vykorystanniam deformatsiinoi modeli: rekomendatsii. Rivne : NUVHP, 2018. 34 s.

**9.** Маилян Л. Р. Приближенный метод расчета неразрезных балок с учетом перераспределения усилий. *Бетон и железобетон*. 1983. № 8. С. 35–36.

Maylian L. R. Priblyzhennyi metod rascheta nerazreznykh balok s uchetom pereraspredeleniya usiliy. *Beton i zhelezobeton*. 1983. № 8. S. 35–36.

**10.** Андрійчук О.В., Нінічук М.В. Теоретичне визначення характеристик напружено-деформованого стану та несучої здатності нормальних перерізів комбіновано-армованих згинальних елементів. *Сучасні технології та методи розрахунків у будівництві*. 2020. Вип. 14. С. 26-35.

Andriichuk O. V., Ninichuk M. V. Teoretychne vyznachennia kharakterystyk napruzhenodeformovanoho stanu ta nesuchoi zdatnosti normalnykh pereriziv kombinovano-armovanykh zghynalnykh elementiv. *Suchasni tekhnolohii ta metody rozrakhunkiv u budivnytstvi*. 2020. Vyp. 14. S. 26-35.

**11.** Андрійчук О. В., Нінічук М. В. Трищиностійкість нерозрізних комбіновано-армованих залізобетонних балок із різними типами армування сталевими фібрами. *Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди*. 2019. Вип. 37. С. 97-105.

Andriichuk O. V., Ninichuk M. V. Trishchynostiikist nerozriznykh kombinovano-armovanykh zalizobetonnykh balok iz riznymy typarami armuvannia stalevymy fibramy. *Resursoekonomni materialy, konstruksii, budivli ta sporudy*. 2019. Vyp. 37. S. 97-105.