

**МЕТОДИ МОНТЕ-КАРЛО В ЗАДАЧАХ ОЦІНЮВАННЯ НАДІЙНОСТІ  
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ: ОГЛЯД**

**MONTE CARLO METHODS IN THE TASKS OF ASSESSING THE  
RELIABILITY OF REINFORCED CONCRETE MEMBERS: A REVIEW**

**Титаренко Р. Ю., к.т.н., доцент, Хміль Р. Є., д.т.н., професор  
(Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів)**

**Tytarenko R. Yu., Ph.D., Associate Professor, <https://orcid.org/0000-0002-4550-6422>, Khmil R. Ye., Doctor of Technical Sciences, Professor, <https://orcid.org/0000-0001-7578-8750> (Lviv Polytechnic National University, Lviv)**

**У статті проведено аналітичний огляд методів Монте-Карло в розрізі їх застосування в задачах оцінювання надійності (в т.ч. довговічності) залізобетонних елементів. Окреслені основні переваги та недоліки цих методів згідно загальноприйнятих теорій. Сформульовані рекомендації щодо подальших досліджень надійності залізобетонних елементів, що знаходяться в експлуатації, із використанням методів Монте-Карло.**

**Recently, the relevance of the optimization problem of design solutions of reinforced concrete (RC) structures through the maximum use of their bearing capacity resources has increased. In turn, solving this problem requires a fundamental understanding of the concepts of reliability and durability. Since any loads, impacts, and bearing capacity reserve (strength and deformability of materials, geometric dimensions, etc.) parameters are not deterministic (all of them are stochastic), there is a need to create probabilistic models (for example, for assessing the same reliability of RC members), which in the future can become the basis of the “reliability design” concept.**

**A statistical description of the stochastic parameters specified above is necessary for any research on the reliability (including non-failure, durability, and residual resource) of RC members and structures, which, in turn, leads to the use of various methods of failure probability calculations (and, accordingly, the use of different laws of the distribution of random variables). Among other things, this article is dedicated to the analytical review of Monte Carlo methods in terms of their use in the tasks of assessing the reliability (including durability) of RC members. Moreover, these methods' main advantages and disadvantages are outlined according to generally accepted theories.**

**Additionally, based on a review of modern literature, formulated recommendations for further studies of the reliability and durability of RC members (including damaged ones) in operation under the conditions of the combined action of loads and an aggressive environment, using Monte Carlo methods.**

**Ключові слова:** метод, Монте-Карло, функція, розподіл, вибірка, залізобетон, елемент, оцінка, надійність, довговічність, експлуатація, ймовірність, стохастичність.

method, Monte Carlo, function, distribution, sample, reinforced concrete (RC), member, assessment, reliability, durability, operation, probability, stochasticity.

**Вступ.** Відповідно до [1], розрізняють декілька рівнів характеристик працездатності: від нормативних, що містять детальний опис завершення процесу, до «чистої» працездатності, яка дозволяє більший ступінь свободи при виконанні ідентичних завдань). Своєю чергою, методи перевірки надійності будівельних конструкцій, зокрема залізобетонних (далі – з/б), здебільшого є рішеннями, що ґрунтуються на працездатності; однак, згідно вимог [2, 3], вони є нормативними при визначенні дій щодо забезпечення порівнянних показників й забезпечення відповідного рівня безпеки. Більше того, оскільки проблема оцінювання надійності є комплексною [4], навіть у чинних профільних нормативних документах [5–8] представлені там вказівки носять виключно рекомендаційний характер.

Імовірнісний аналіз надійності (в т.ч. безвідмовності, довговічності чи залишкового ресурсу) нині є дуже актуальним завданням у зв'язку з глобальною необхідністю досягнення максимальних ефективності та економічності як при новому будівництві, так і при реконструкції. Виходячи з цього, імовірнісний розрахунок з/б елементів полягає в тому, щоб знайти ймовірнісні характеристики їх переміщень, зусиль або напружень із ймовірнісних характеристик діючих навантажень та впливів, а також параметрів міцності (деформативності) матеріалів й геометрії перерізів [4, 9, 10]. Таким чином, усі характеристики конструкцій, які обумовлюють так званий «резерв несучої здатності», як і всі зовнішні дії на них, розглядаються тут як стохастичні величини (процеси).

**Мета теоретичного дослідження.** Основною метою дослідження є проведення детального аналізу особливостей методів Монте-Карло (згідно загальноприйнятих теорій) в розрізі їх застосування в задачах оцінювання надійності з/б елементів; на основі огляду сучасної літератури, додатковою метою роботи вбачається формування ряду рекомендацій для майбутніх досліджень надійності та довговічності з/б конструкцій (в т.ч. із пошкодженнями), що знаходяться в експлуатації за умов сумісної дії механічних навантажень й корозійно-агресивного середовища.

**Методи Монте-Карло: основні теоретичні засади та передумови використання в задачах оцінювання надійності з/б елементів.** Найбільш

простим є імовірнісний розрахунок конструкцій, роботу яких можна описати лінійною функцією; своєю чергою, на практиці доволі часто зустрічаються випадки, коли функція стохастичних величин не є строго лінійною, проте майже не відрізняється від такої, й при розв'язанні задачі її можна наближено вважати лінійною [10]. Дане припущення має місце за умови, що випадкові зміни значень  $n$  вхідних параметрів ( $X_1, X_2, \dots, X_n$ ) є відносно незначними (знаходяться в межах 20 %) – величина статистичної мінливості параметрів роботи з/б елементів часто відповідає цій умові [11]. Далі, для виконання розрахунку статистичних характеристик таких функцій, їх лінеаризують шляхом розкладання в ряд Тейлора в околі центру розподілу випадкових аргументів (в точці математичного сподівання функції) [10].

Однак насправді жодна функція стохастичних величин не є строго лінійною, і у випадку мінімізації значень ймовірностей майбутніх відмов конструкцій, припущення, наведене в абзаці вище, може не працювати. Крім того, деякі параметри, які необхідно враховувати при побудові стохастичних моделей роботи з/б елементів, мають випадкові зміни значень, що значно перевищують межу 20 % (наприклад, мінливість деяких видів кліматичних навантажень чи впливів агресивного середовища). Водночас зі збільшенням значень коефіцієнтів варіації (стандартів) вхідних параметрів підвищується і ймовірність відмови конструкцій, а також знижується їх загальний рівень надійності й довговічності. Дана проблема є особливо актуальною для з/б елементів будівель та споруд класу наслідків СС3 [5, 8], при проектуванні котрих (у багатьох випадках) необхідний аналіз надійності. Більше того, оскільки допустиме значення похибки розрахунку відмов нелінійних систем суттєво залежить не тільки від кількості вхідних змінних, а й від об'ємів їх статистичних вибірок – пошук аналітичного рішення за допомогою вищезгаданого методу статистичної лінеаризації вже буде проблематичним. Таким чином, виникає необхідність використання універсальних методів розрахунку імовірнісних задач – методів статистичного моделювання (методів Монте-Карло) [9, 10].

Механізм розв'язування задач методами Монте-Карло базується на тому, що теорія ймовірностей (серед декількох її інтерпретацій) трактується як математична теорія поведінки вибіркового середнього із тенденцією до їх стабілізації зі збільшенням обсягу вибірки [9]. Своєю чергою, надійність з/б конструкцій, в загальному випадку, можна оцінити кількісно – через ймовірність їх відмови або безвідмовної роботи ( $P_f$ ), які також пов'язані з індексом надійності ( $\beta$ ) через відому функцію помилок [11].

Індекс надійності ( $\beta$ ) оперує діями й опорами, котрі надалі розглядаються як змінні в імовірнісних моделях, у яких:  $Q_m, V_Q, Q_n$  – середня дія, коефіцієнт варіації відносно дії та номінальна розрахункова (проектна) дія відповідно;  $R_m, V_R, R_n$  – середній опір, коефіцієнт варіації відносно опору та номінальний розрахунковий (проектний) опір відповідно.

У більшості випадків криві розподілу (відстань між якими, власне, і є шуканим параметром працездатності) моделей дії та опору відповідають логнормальному (або часто нормальному) розподілу [1]. Проте припущення про логарифмічну нормальність (або нормальність) змінних має значення лише тоді, якщо вони статистично незалежні. Крім того, певні ключові параметри роботи з/б елементів часто не підпорядковуються нормальному закону розподілу; наприклад, згідно досліджень [12, 13] захисний шар бетону ( $c$ , мм) має бета-розподіл.

Отже, на основі вищенаведеного можна сформулювати наступні недоліки практично всіх методів розрахунку ймовірності відмови (двох моментів, гарячих точок та ін.), котрі ґрунтуються на застосуванні нормального закону розподілу вхідних параметрів [1, 10, 11]:

- 1) обмеженість їх використання;
- 2) значні похибки розрахунків (внаслідок наближеного опису розподілу стохастичних величин);
- 3) функції, які визначають зони відмови (безвідмовної роботи), повинні бути всюди диференційованими.

На відміну від інших, методи Монте-Карло є більш ефективними, адже дають менший розкид в оцінці ймовірності відмови (безвідмовної роботи) з/б конструкцій [9, 10]. Центральна ідея цих методів базується на побудові вибірки (на основі конкретного статистичного розподілу) для кожної змінної, залученої до задачі; й, оскільки в цих методах також моделюється функція граничного стану – чим більша вибірка береться, тим більша буде точність ймовірності відмови (безвідмовної роботи) [9, 14].

Очевидно, що термін «методи Монте-Карло» описує достатньо широкий клас підходів [9]; однак, здебільшого, ці підходи використовують один шаблон:

- 1) визначається область можливих вхідних даних;
- 2) вхідні дані з визначеної вище області генеруються випадковим чином із використанням певного заданого розподілу ймовірностей (використовується так званий «генератор псевдовипадкових чисел»);
- 3) виконуються детерміновані розрахунки над вхідними даними;
- 4) проміжні результати окремих обчислень зводяться до кінцевого результату.

Загальний вираз для знаходження ймовірності відмови, згідно монографій [9, 10], можна представити у наступному вигляді:

$$P_f \approx m^{-1} \sum F_R(Q_i), \quad (1)$$

де  $m$  – кількість тестів (випробувань);  $F_R(Q_i)$  – шукане значення функції розподілу величини  $R$  (несучої здатності) за аргументом  $Q$  (навантажувального ефекту);  $Q_i$  – змодельована реалізація величини  $Q$  за результатами  $i$ -тесту (випробування).

Недоліками ж більшості таких методів є наступні [9, 10, 14]:

1) у багатовимірному випадку одна із функцій розподілу величин  $R$  і  $Q$  повинна бути заздалегідь заданою;

2) для більшої точності розрахунку ймовірності відмови чи безвідмовної роботи  $P_f$  необхідна велика кількість симуляцій  $m$ .

Проте, варто додати, що в деяких методах Монте-Карло ефективність зростає за рахунок зменшення дисперсії оцінки [10]. Одним із способів зменшення дисперсії є стратифікація змодельованої вибірки – лише на необхідних класових інтервалах та із заданими обсягами класових вибірок (наприклад, вибірка значення  $Q_i$  при використанні рівняння (1)).

**Рекомендації та висновки.** Станом на сьогодні проблема оцінювання надійності (в т.ч. безвідмовності, довговічності та залишкового ресурсу) з/б конструкцій набула особливої актуальності у зв'язку з глобальною необхідністю досягати максимальної ефективності та економічності як при новому будівництві (стадія проектування), так й при реконструкції (стадія експлуатації). Своєю чергою, імовірнісний підхід до цієї проблеми дозволяє з високою точністю отримувати показники відмови (безвідмовності) з/б елементів, а також прогнозувати їх довговічність (залишковий ресурс).

Серед методів, які дозволяють оцінювати ту ж таки ймовірність відмови конструкцій, методи статистичного моделювання (так звані «методи Монте-Карло») проявляють себе найкращим чином – завдяки можливості роботи з будь-якими діапазонами вибірки та законами розподілу стохастичних величин. Більше того, на основі огляду ряду нових й вдосконалених підходів до оцінювання надійності та довговічності з/б елементів, які ґрунтуються на застосуванні методів Монте-Карло [15–20], стає очевидним, що в майбутньому, для побудови об'єктивних методик розрахунку та підвищення достовірності результатів, окрім необхідних обсягів вибірок стохастичних даних, актуальним завданням буде забезпечення безперервного моніторингу цих даних.

Беручи до уваги вищенаведене, ми рекомендуємо використовувати методи Монте-Карло для подальших досліджень у сфері оцінювання надійності та довговічності з/б конструкцій (в т.ч. пошкоджених), що знаходяться в експлуатації за умов сумісної дії навантажень та агресивного середовища.

1. Structural Reliability Handbook. Canberra : Australian Building Codes Board, 2015. 39p.

2. ACI 318-19. Building Code Requirements for Structural Concrete. Farmington Hills, MI : American Concrete Institute (ACI), 2019. 623 p. (An ACI Standard).

3. ДБН В.2.6-98:2009. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. [Чинні від 2011-06-01]. Вид. офіц. Київ : Мінрегіонбуд України, 2011. 71 с. (Конструкції будинків і споруд).

DBN V.2.6-98:2009. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii. Osnovni polozhennia. [Chynni vid 2011-06-01]. Vyd. ofits. Kyiv : Minrehionbud Ukrainy, 2011. 71 s. (Konstruktsii budynkiv i sporud).

4. Tytarenko R., Khmil R., Selejdak J., Vashkevych R. Probabilistic durability assessment of RC structures in operation: an analytical review of existing methods. *Lecture Notes in Civil Engineering*. 2023. Vol. 290. P. 408–415.
5. EN 1990:2002. Eurocode – Basis of structural design. Brussels : European Committee for Standardization (CEN), 2002. 116 p. (European Standard).
6. ISO 2394:2015. General principles on reliability for structures. 4<sup>th</sup> ed. Geneva : International Organization for Standardization (ISO), 2015. 111 p. (International Standard).
7. ISO 13823:2008. General principles on the design of structures for durability. 1<sup>st</sup> ed. Geneva : International Organization for Standardization (ISO), 2008. 39 p. (International Standard).
8. ДБН В.1.2-14:2018. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд. [Чинні від 2019-01-01]. Вид. офіц. Київ : Мінрегіон України, 2018. 30 с. (Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів).
- DBN V.1.2-14:2018. Zahalni pryntsypy zabezpechennia nadiinosti ta konstruktyvnoi bezpeky budivel i sporud. [Chynni vid 2019-01-01]. Vyd. ofits. Kyiv : Minrehion Ukrainy, 2018. 30 s. (Systema zabezpechennia nadiinosti ta bezpeky budivelnykh obiektiv).
9. Ditlevsen O., Madsen H. O. Structural Reliability Methods : Monograph. Internet ed. 2.2.5. Lyngby : Technical University of Denmark, 2005. 351 p.
10. Raizer V. D. Theory of reliability in structural design : Monograph. Moscow : ASV, 1998. 302 p.
11. Khmil R. Ye., Tytarenko R. Yu., Blikharsky Ya. Z., Vegera P. I. Improvement of the method of probability evaluation of the failure-free operation of reinforced concrete beams strengthened under load. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2021. Vol. 1021, No 1. Art. No 012014.
12. Schiessl P. New approach to service life design of concrete structure. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*. 2005. Vol. 6, No 5. P. 393–407.
13. Van Coile R., Caspeepe R., Taerwe L. The mixed lognormal distribution for a more precise assessment of the reliability of concrete slabs exposed to fire. *Safety, Reliability and Risk Analysis: Beyond the Horizon – Proceedings of the European Safety and Reliability Conference (ESREL 2013)*. London : Taylor & Francis Group, 2014. P. 2693–2699.
14. Nogueira C. G., Leonel E. D., Coda H. B. Reliability algorithms applied to reinforced concrete structures durability assessment. *IBRACON Structures and Materials Journal*. 2012. Vol. 5, No 4. P. 440–450.
15. Conciatori D., Bruhwiler E., Morgenthaler S. Calculation of reinforced concrete corrosion initiation probabilities using the Rosenblueth method. *International Journal of Reliability and Safety*. 2009. Vol. 3, No 4. P. 345–362.
16. Pellizzer G. P., Leonel E. D., Nogueira C. G. Influence of reinforcement's corrosion into hyperstatic reinforced concrete beams: a probabilistic failure scenarios analysis. *IBRACON Structures and Materials Journal*. 2015. Vol. 8, No 4. P. 479–490.
17. Şengül Ö. Probabilistic design for the durability of reinforced concrete structural elements exposed to chloride containing environments. *Teknik Dergi*. 2011. Vol. 22, No 2. P. 5409–5423.
18. Yuan W., Wu X., Wang Y., Liu Z., Zhou P. Time-dependent seismic reliability of coastal bridge piers subjected to nonuniform corrosion. *Materials*. 2023. Vol. 16, No 3. Art. No 1029.
19. Huang Y., Yan D., Yang Z., Liu G. 2D and 3D homogenization and fracture analysis of concrete based on in-situ X-ray Computed Tomography images and Monte Carlo simulations. *Engineering Fracture Mechanics*. 2016. Vol. 163. P. 37–54.
20. Wang J., Wang Y., Zhang Y., Liu Y., Shi C. Life cycle dynamic sustainability maintenance strategy optimization of fly ash RC beam based on Monte Carlo simulation. *Journal of Cleaner Production*. 2022. Vol. 351. Art. No 131337.