УДК 539.3

ВАРІАЦІЙНИЙ ПРИНЦИП СТОСОВНО ВСТАНОВЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТОСТІННОЇ ПРУЖНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

VARIATIONAL PRINCIPLE FOR DETERMINING THE PARAMETERS OF FREE VIBRATIONS OF A THICK-WALLED ELASTIC ANISOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

Трач В.М., д.т.н., проф. (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Подворний А.В., к.т.н., доц.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Бондарський О.Г., к.т.н., доц.** (Луцький національний технічний університет, м. Луцьк)

Trach V.M., doctor of technical sciences, professor (National university of water management and nature resources use, Rivne) ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Podvornyi A.V., candidate of technical sciences, associate professor** (National university of water management and nature resources use, Rivne) ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, **Bondarskyy O.G., candidate of technical sciences, associate professor** (Lutsk national technical university, Lutsk) ORCID ID: 0000-0003-4624-8485

В роботі, спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь руху в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат. На її основі приведений підхід до встановлення частоти вільних коливань анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки

In this work, based on the modified Hu-Washizu variational principle, a three-dimensional system of homogeneous differential equations of motion in partial derivatives of the linear theory of elasticity of an anisotropic body in a cylindrical coordinate system is obtained. To reduce it to one-dimensional, the Bubnov-Galerkin method was used. The unknown of system of equations along the generatrix and in the circumferential directions were approximated by this method. To solve the one-dimensional problem in the direction normal to the middle surface of the shell was used the method of discrete orthogonalization.
The frequencies of free vibrations of an anisotropic thick-walled composite cylindrical shell are investigated. The analysis of the change in the frequencies of free vibrations of the shell is carried out depending on the change in the

angle of rotation of the main directions of elasticity of unidirectional fibrous material and the thickness of the cylinder.

Ключові слова:
Товста анізотропна циліндрична оболонка, рівняння руху, тривимірна постановка, частоти вільних коливань.
Thick anisotropic cylindrical shell, equations of motion, three-dimensional formulation, frequencies of free vibrations.

Вступ. Аналіз останніх досліджень. Варіаційні принципи ефективно використовуються для розв'язання задач теорії пружності чи будівельної механіки [1, 2, 3, 4, 5, 6]. З їх допомогою будуються несуперечливі моделі розрахунку складних конструкцій при різних фізичних впливах. Широке використання в практиці розрахунку конструкцій чисельного методу кінцевих елементів також пов'язано з варіаційними принципами [1, 2, 4, 7, 8, 9]. У той же час метод дискретної ортогональності розв'язання завдань теорії пружності з розділювальними змінними, основним етапом якого є розв'язок канонічної системи звичайних диференціальних рівнянь [10, 11, 12, 13÷18], як відомо авторам, лише в [3] пов'язується з варіаційним принципом. Відомо, що принцип Рейсснера являє собою гамільтонову форму принципу Лагранжа [5]. Сукупність необхідних умов стаціонарності в цьому випадку формулюється у вигляді системи рівнянь щодо частинних похідних першого порядку від компонентів вектора переміщень і тензора напружень. Привести цю систему до стандартного нормального вигляду можна тільки позбавившись залежності функцій від двох координат. Складнощі при отриманні канонічної системи виходячи з принципу Рейсснера будуть такими ж, як і без використання цього принципу, хоча логіка прийнятих рішень буде виглядати більш обґрунтованою [3, 6, 19]. Методи перетворення функціоналів [1, 4, 5, 20] дозволяють сформулювати такий з них, умови стаціонарності якого записуються у вигляді системи диференціальних рівнянь щодо обраних змінних. Після зменшення розмірності задачі, отримана система відразу набуває стандартного нормального вигляду. Зменшення її розмірності може бути виконано шляхом завдання виду розв'язку тривимірної задачі за двома координатами або ж шляхом попереднього використання гіпотез прикладних теорій. Нижче викладена методика модифікації функціонала узагальненого принципа Ху-Васідзу до потрібного виду, ґрунтуючись на співвідношеннях лінійної теорії пружності анізотропного тіла. Пружні властивості його матеріалу знаходяться в одній площині. Також приймемо, що анізотропне тіло являє собою пустотілий композитний товстостінний циліндр (рис. 1).

Постановка мети і задач досліджень. Принцип Ху-Васідзу. У відповідності до варіаційного принципу Ху-Васидзу [2] рівняння руху, співвідношення пружності (рівняння стану), геометричні співвідношення та відповідні граничні умови можуть бути отримані з умови стаціонарності функціоналу Π_1, що визначається з інтегралу для динамічних задач:

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2}\left(u_{i;j} + u_{j;i}\right) \right] \right\} dV + \right.$$

$$\left. + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) \right\} dS \ . \tag{1}$$

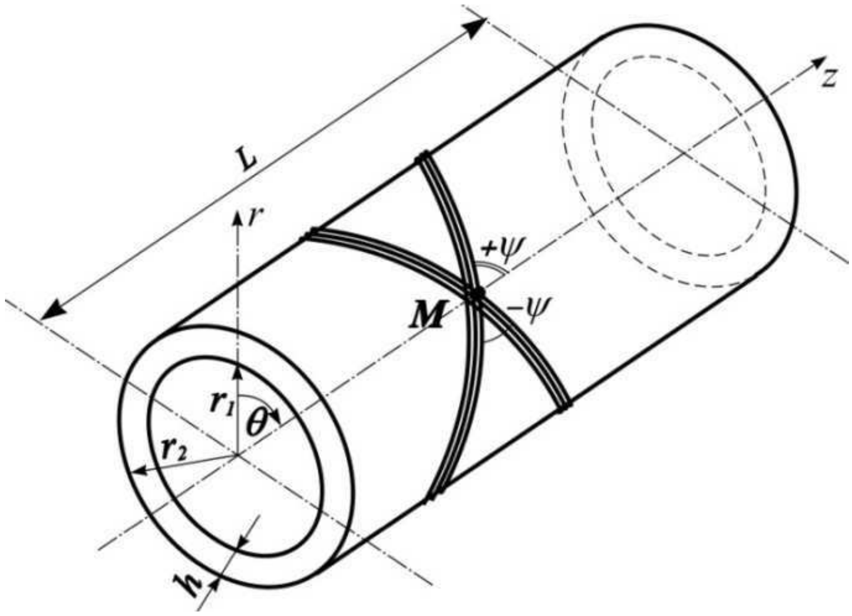

Рис. 1. Циліндрична товстостінна анізотропна оболонка.

Тут варіюються без додаткових умов переміщення u_i, деформації e_{ij}, напруження σ_{ii}, напруження p_i на поверхні S_2, що викликані переміщеннями $\bar{u}_i$. Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень, u_i – компоненти вектора переміщень, крапка з комою перед параметрами *i*, *j* позначає коваріантну похідну за координатою з відповідним індексом *i*, *j* = 1, 2, 3. Потенціальна енергія деформації у векторно-матричному представленні записується так

$$W\left(e_{ij}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon^T B \varepsilon \ , \tag{2}$$

де $\varepsilon^T = (\varepsilon_{zz},\ \varepsilon_{\theta\theta},\ \varepsilon_{rr},\ 2\varepsilon_{r\theta},\ 2\varepsilon_{rz},\ 2\varepsilon_{z\theta})$, B – матриця коефіцієнтів пружності.

Якщо ввести вектор $\sigma^T = (\sigma_{zz},\ \sigma_{\theta\theta},\ \sigma_{rr},\ \sigma_{r\theta},\ \sigma_{rz},\ \sigma_{z\theta})$, то з умови стаціонарності $\delta\Pi_1$, отримуємо такі рівняння:

$$\sigma = B\varepsilon\,, \tag{3}$$
$$\varepsilon = \varepsilon(\mathrm{u})\,, \tag{4}$$
$$\sigma_{ij;j} + f_i = 0\,, \tag{5}$$

а також граничні умови $\sigma_{ij}n_j = \overline{F_i}$ на поверхні S_1 та переміщення $u_i = \overline{u}_i$ й напруження $p_i = \sigma_{ij}n_j$ на S_2.

У співвідношеннях для деформації (4) представлено взаємозв'язок між деформаціями та переміщеннями. Обернені до співвідношень пружності (3) залежності деформацій від напружень представимо у вигляді

$$\varepsilon = A\sigma\,, \tag{6}$$

де матриця $A = B^{-1}$.

Коефіцієнти матриці A позначимо через a_{ij}, а матриці B – b_{ij} $(i,\ j = \overline{1,6})$. Матриці A та B – симетричні, так як $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$. В подальшому також встановимо взаємозв'язок між матрицями A та B.

Модифікований змішаний варіаційний принцип. Підемо шляхом, що представлений в [3, 21, 22, 23], для виведення модифікованого до Ху-Васідзу змішаного варіаційного принципу та розділимо вектори σ та ε на дві частини так, щоб

$$\sigma_1^T = (\sigma_{rr},\, \tau_{r\theta},\, \tau_{rz}), \qquad \sigma_2^T = (\sigma_{zz}, \sigma_{\theta\theta}, \tau_{z\theta}),$$
$$\varepsilon_1^T = (\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \varepsilon_{rz}), \qquad \varepsilon_2^T = (\varepsilon_{zz},\, \varepsilon_{\theta\theta},\, \varepsilon_{z\theta}). \tag{7}$$

Для скорочення записів співвідношення пружності (3) та інші будемо записувати у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

де для блоків A_{ij}, згідно з прийнятим поділом (7) з матриці A в (3) для анізотропного матеріалу, пружні властивості якого знаходяться в одній площині, отримаємо:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{36} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{13} & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 \\ a_{36} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

З матричної залежності $\varepsilon = A\sigma$, при використанні (8), отримаємо:

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2, \tag{10}$$

$$\varepsilon_2 = A_{21}\sigma_1 + A_{22}\sigma_2, \tag{11}$$

після чого з (11) маємо вираз для

$$\sigma_2 = A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{T} A_{12}^{T}\sigma_1. \tag{12}$$

Останній підставимо в (10) і тоді

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\sigma_1 = A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 +$$
$$+ \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)\sigma_1. \tag{13}$$

З (13) знайдемо σ_1

$$\sigma_1 = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \cdot \varepsilon_1 - \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} \cdot A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2. \tag{14}$$

З матричної залежності

$$\sigma = B \cdot \varepsilon \tag{15}$$

запишемо

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Для розглядуваного виду анізотропного матеріалу, маємо:

$$\sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2, \tag{17}$$

$$\sigma_2 = B_{21} \cdot \varepsilon_1 + B_{22} \cdot \varepsilon_2. \tag{18}$$

Співставляючи (15) та (14), встановимо зв'язок між матрицями

$$B_{11} = \left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}, \tag{19}$$

$$B_{12} = -\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}. \tag{20}$$

У вираз для σ_2 (12) підставимо (14) і тоді

$$\sigma_2 = A_{22}^{-1}\varepsilon_2 - A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}\varepsilon_1 + A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} -\right.$$
$$\left.- A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)A_{12}A_{22}^{-1}\varepsilon_2 = -A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}\varepsilon_1 +$$
$$+ \left[A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)A_{12}A_{22}^{-1}\right]\varepsilon_2. \tag{21}$$

Згідно з (21) і (18) маємо такий зв'язок між матрицями

$$B_{21} = -A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1}, \tag{22}$$

$$B_{22} = A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}\right)^{-1} A_{12}A_{22}^{-1}. \tag{23}$$

Таким чином, виразами (19) і (20) та (22) і (23) встановлено зв'язок між матрицями у двох формах запису (3) і (6) узагальненого закону Гука для прийнятого виду матеріалу.

На відміну від принципу Ху-Васідзу приймемо, що незалежними у функціоналі (1) будуть переміщення u_r, u_θ, u_z, деформації ε_{zz}, $\varepsilon_{z\theta}$, $\varepsilon_{\theta\theta}$ і напруження σ_{rr}, $\tau_{r\theta}$, τ_{rz}. З рівнянь

$$\sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2, \tag{24}$$

$$\varepsilon_2 = A_{21} \cdot \sigma_1 + A_{22} \cdot \sigma_2 \tag{25}$$

знайдемо

$$\varepsilon_1 = B_{11}^{-1} \cdot \sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \cdot \varepsilon_2, \quad \sigma_2 = A_{22}^{-1} \cdot \varepsilon_2 - A_{22}^{-1} A_{21} \cdot \sigma_1. \tag{26}$$

Вираз для потенціала $W(e_{ij})$ в нових позначеннях приведемо до вигляду

$$W(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_1^T B_{11} \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T B_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T \varepsilon_1 + \varepsilon_2^T B_{22} \varepsilon_2\right). \tag{27}$$

З виразу (27), враховуючи (26), виключимо ε_1. Тоді отримаємо

$$W(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}\Big[\left(B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2\right)^T B_{11}\left(B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2\right) +$$

$$+\left(B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2\right)^T B_{12} \varepsilon_2 + \varepsilon_2^T B_{12}^T \left(B_{11}^{-1}\sigma_1 - B_{11}^{-1} B_{12} \varepsilon_2\right) + \varepsilon_2^T B_{22} \varepsilon_2\Big].$$

Після нескладних перетворень остаточно отримаємо:

$$W(\sigma_1, \varepsilon_2) = \frac{1}{2}\sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^T \left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2. \tag{28}$$

Аналогічним чином перетворимо вираз $\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}$. Після співставлення матричних виразів

$$\varepsilon_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2 \text{ та } \sigma_1 = B_{11} \cdot \varepsilon_1 + B_{12} \cdot \varepsilon_2$$

неважко встановити, що $B_{12} B_{22}^{-1} = -A_{11}^{-1} A_{12}$.

Тоді

$$\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij} = \sigma_1^T B_{11}^{-1} \sigma_1 + \varepsilon_2^T \left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2. \tag{29}$$

Виключивши з виразу $\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}(u)$ складову вектора напружень σ_2, отримаємо

$$\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(u) = \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}\right)\sigma_1 + \varepsilon_2^T(u)\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2. \tag{30}$$

Збираючи вирази (28÷30), запишемо потенціал

$$W_1 = W(\sigma_1, \varepsilon_2) - \sigma_{ij}\left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}(u)\right) = -\frac{1}{2}\sigma_1^T B_{11}^{-1}\sigma_1 - \frac{1}{2}\varepsilon_2^T\left(B_{22} - \right. \tag{31}$$

$$\left. - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2 + \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2^T(u) B_{12}^T B_{11}^{-1}\right)\sigma_1 + \varepsilon_2^T(u)\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2$$

В (1) символом $T(u_i)$ представлена кінетична енергія. З погляду на прийняте позначення, запишемо її так

$$T(u_i) = \frac{1}{2}\iiint_V \rho\left(\dot{u}_r^2 + \dot{u}_\theta^2 + \dot{u}_z^2\right) dr\, d\theta\, dz\,, \tag{32}$$

де $\dot{u}_r$, $\dot{u}_\theta$, $\dot{u}_z$ – швидкості в напрямку осей циліндричної системи координат r, θ, z (рис. 1), а ρ – щільність матеріалу з якого виготовлена конструкція.

Отримані рівняння є рівняннями руху, так як після варіювання (32) та інтегрування частинами за часом, отримаємо варіацію кінетичної енергії анізотропної оболонки

$$\delta T = \iint_{S_1} \rho\left[\dot{u}_r \delta\dot{u}_r + \dot{u}_\theta \delta\dot{u}_\theta + \dot{u}_z \delta\dot{u}_z\right]\Big|_{t_1}^{t_2} dS_1 -$$

$$- \int_{t_1}^{t_2}\iiint_V \rho\left(\ddot{u}_r \delta u_r + \ddot{u}_\theta \delta u_\theta + \ddot{u}_z \delta u_z\right) dt \cdot dV\,. \tag{33}$$

Однак, при цьому слід врахувати, що було використано такі вирази для апроксимації переміщень [19]

$$u(r, \theta, z, t) = \rho \cdot u(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t} \tag{34}$$

та напружень

$$\sigma_1^T = \sigma_1^T \cdot e^{-i\omega t} = \left[\sigma_r, \sigma_{r\theta}, \sigma_{rz}\right] \cdot e^{-i\omega t}\,. \tag{35}$$

В (34) та (35) ω є частотою вільних коливань анізотропної оболонки. Виконавши операцію диференціювання (35) за часом, отримаємо вирази для прискорень

$$\ddot{u}(r, \theta, z, t) = -\rho\,\omega^2 \cdot u(r, \theta, z) \cdot e^{-i\omega t}\,. \tag{36}$$

З урахуванням того, що мета цієї роботи дослідження частот вільних коливань оболонок запишемо кінцевий вигляд функціоналу Π_1, що представлений в (1), у вигляді

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V \left[W(\sigma_1, \varepsilon) - T(u_i)\right] dV\right\} dt\,. \tag{37}$$

Вираз для Π_1 являє собою частину функціоналу (1), так як у ньому замінена кількість незалежних величин, внаслідок виконання співвідношень (28) і умови $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(u)$. Тоді варіація функціонала (37), що обумовлена зміною компонентів вектора переміщень u і напружень σ_1, набирає вигляду

$$\delta\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\iiint_V \left\{\left[-\frac{1}{2}\sigma_1^T B_{11}^{-1}\sigma_1 + \left(\varepsilon_1^T(u) + \varepsilon_2(u) B_{11}^T B_{12}^{-1}\right)\sigma_1\right]\delta\sigma_1 - \right.\right.$$

$$-\left[\frac{1}{2}\varepsilon_2^T\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2\right]\delta\varepsilon_2 + \left[\varepsilon_2^T(u)\left(B_{22} - B_{12}^T B_{11}^{-1} B_{12}\right)\varepsilon_2\right]\delta u -$$

$$\left.\left. - T(u)\delta u\right\} dV\right\} dt \,. \qquad (38)$$

В подальшому використаємо лінійні геометричні співвідношення, що приведені в [24]:

$$e_{rr}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \qquad e_{rz}^i = \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; \qquad e_{r\theta}^i = \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r}u_\theta^i + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}. \quad (39)$$

Тут e_{rr}^i – відносні лінійні деформації за напрямком координатної осі r, а e_{rz}^i, $e_{r\theta}^i$ – дотичні до відповідних координатних поверхонь відносні зсувні деформації.

З умови стаціонарності (38) при використанні виразів для напружень $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$, переміщень $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$, геометричних співвідношень (39), залежностей для варіації кінетичної енергії (33), (34), (35), (36), а також варіацій роботи зовнішніх сил (38) і прирівнювання виразів при незалежних варіаціях напружень $\delta\sigma_{rr}$, $\delta\tau_{r\theta}$, $\delta\tau_{rz}$ і переміщень δu_r, δu_θ, δu_z в інтегралі за об'ємом V , отримаємо такі рівняння:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = -\frac{c_{23}^i + 1}{r}\sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2}u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r}\frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2}\frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} +$$

$$+\frac{c_{26}^i}{r}\frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2}\frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_r;$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = c_{13}^i\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r}\tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r}\frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i\frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2}\frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} -$$

$$-\frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r}\frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \frac{c_{36}^i}{r}\frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2}\frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r}\frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i\frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} -$$

$$-\frac{c_{26}^i}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial\theta^2}+\rho^i\omega^2 u_z;$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}^i}{\partial r}=\frac{c_{23}^i}{r}\frac{\partial\sigma_{rr}^i}{\partial\theta}-\frac{2}{r}\tau_{r\theta}^i-\frac{c_{22}^i}{r^2}\frac{\partial u_r^i}{\partial\theta}-\frac{c_{12}^i+c_{66}^i}{r}\frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z\partial\theta}-c_{66}^i\frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2}-$$

$$-\frac{c_{22}^i}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial\theta^2}+c_{36}^i\frac{\partial\sigma_{rr}^i}{\partial z}-\frac{c_{26}^i}{r}\frac{\partial u_r^i}{\partial z}-c_{16}^i\frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2}-\frac{c_{26}^i}{r^2}\frac{\partial^2 u_z^i}{\partial\theta^2}-$$

$$-\frac{2c_{26}^i}{r}\frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z\partial\theta}+\rho^i\omega^2 u_\theta;$$

$$\frac{\partial u_r^i}{\partial r}=c_{33}^i\sigma_{rr}^i+\frac{c_{23}^i}{r}u_r^i+c_{13}^i\frac{\partial u_z^i}{\partial z}+\frac{c_{36}^i}{r}\frac{\partial u_z^i}{\partial\theta}+c_{36}^i\frac{\partial u_\theta^i}{\partial z}+\frac{c_{23}^i}{r}\frac{\partial u_\theta^i}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial u_z^i}{\partial r}=a_{55}^i\tau_{rz}^i+a_{45}^i\tau_{r\theta}^i-\frac{\partial u_r^i}{\partial z};$$

$$\frac{\partial u_\theta^i}{\partial r}=a_{45}^i\tau_{rz}^i+a_{44}^i\tau_{r\theta}^i-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^i}{\partial\theta}+\frac{1}{r}u_\theta^i. \qquad (40)$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ; σ_{rr}^i, τ_{rz}^i, $\tau_{r\theta}^i$, – компоненти тензора напружень (7); u_z^i, u_θ^i, u_r^i – переміщення для кожного *i*-го шару оболонки за напрямками відповідно осей z, θ, r; ω є частотою вільних коливань; ρ^i – щільність матеріалу з якого виготовлений *i*-й шар конструкції. Сталі c_{kl}^i (*k, l*=1, 2, 3, 6) – це характеристики *i*-го шару, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i [25, 26] матеріалу оболонки:

$$c_{11}^i=\frac{1}{\left|A_{22}^i\right|}\left(a_{22}^i a_{66}^i-{a_{26}^i}^2\right);\quad c_{12}^i=\frac{1}{\left|A_{22}^i\right|}\left(a_{16}^i a_{26}^i-a_{12}^i a_{66}^i\right);$$

$$c_{22}^i=\frac{1}{\left|A_{22}^i\right|}\left(a_{11}^i a_{66}^i-{a_{16}^i}^2\right);\quad c_{16}^i=\frac{1}{\left|A_{22}^i\right|}\left(a_{12}^i a_{26}^i-a_{22}^i a_{16}^i\right);$$

$$c_{26}^i=\frac{1}{\left|A_{22}^i\right|}\left(a_{12}^i a_{16}^i-a_{11}^i a_{26}^i\right);\quad c_{66}^i=\frac{1}{\left|A_{22}^i\right|}\left(a_{11}^i a_{22}^i-{a_{12}^i}^2\right);$$

$$\left|A_{22}^i\right| = a_{66}^i\left(a_{11}^i a_{22}^i - {a_{12}^i}^2 \right) + a_{26}^i\left(a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i\right) + a_{16}^i\left(a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i\right)$$

$$c_{13}^i = a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i; \quad c_{23}^i = a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i;$$

$$c_{36}^i = a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i; \quad c_{33}^i = a_{33}^i - \left(a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i\right).$$

Таким чином, при використанні варіаційного рівняння (38) виведена тривимірна система (40) з шести однорідних диференціальних рівнянь, що записана в частинних похідних, руху лінійної теорії пружності відносно шести компонентів векторів $\sigma_1^T = (\sigma_{rr}, \tau_{r\theta}, \tau_{rz})$ і $u^T = (u_r, u_\theta, u_z)$ для визначення частот вільних коливань анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки. Головна відмінність отриманої системи рівнянь від представлених в літературі, наприклад [27] в тому, що вона є системою однорідних диференціальних рівнянь руху, для виведення якої було використано модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу. З неї можуть бути встановлені частоти вільних коливань в тривимірній постановці товстостінної композитної анізотропної циліндричної оболонки.

У випадку задачі визначення частот вільних коливань розв’язок системи (40) повинен відповідати умовам на бічних поверхнях при $r = r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \qquad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \qquad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$$

і $r = r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \qquad \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \qquad \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0. \quad (41)$$

Умовам на торцях при $z = 0$, $z = L$ (рис. 1)

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (42)$$

Та умовам жорсткого контакту шарів для напружень та переміщень:

$$\sigma_{rr}^i(r_i) = \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); \qquad \tau_{rz}^i(r_i) = \tau_{rz}^{i+1}(r_i); \qquad \tau_{r\theta}^i(r_i) = \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i);$$

$$u_r^i(r_i) = u_r^{i+1}(r_i); \qquad u_z^i(r_i) = u_z^{i+1}(r_i); \qquad u_\theta^i(r_i) = u_\theta^{i+1}(r_i). \quad (43)$$

де i – номер шару оболонки.

Умови (42) відповідають наявності на краях циліндра діафрагми абсолютно жорсткої в своїй площині та гнучкої з неї [28, 29].

Методика досліджень. Приведення тривимірної системи рівнянь теорії пружності до одновимірної. Для розв’язку тривимірної системи рівнянь (40) при відповідних умовах на поверхнях і торцях відповідно (41), (42) скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди [30] за координатою вздовж твірної циліндра z так, що б вони задовольняли крайовим умовам (42):

$$\sigma_{rr}(r,z,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{1,pk}(r)\cos k\theta+y_{1,mk}^{/}(r)\sin k\theta\right]\sin l_m z\ ;$$

$$\tau_{rz}(r,z,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{2,pk}(r)\cos k\theta+y_{2,mk}^{/}(r)\sin k\theta\right]\cos l_m z\ ;$$

$$\tau_{r\theta}(r,z,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{3,pk}(r)\sin k\theta+y_{3,mk}^{/}(r)\cos k\theta\right]\sin l_m z\ ;$$

$$u_{r}(r,z,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{4,pk}(r)\cos k\theta+y_{4,mk}^{/}(r)\sin k\theta\right]\sin l_m z\ ;$$

$$u_{z}(r,z,\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{5,pk}(r)\cos k\theta+y_{5,mk}^{/}(r)\sin k\theta\right]\cos l_m z\ ;$$

$$u_{\theta}(r,z,\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left[y_{6,pk}(r)\sin k\theta+y_{6,mk}^{/}(r)\cos k\theta\right]\sin l_m z\ . \quad (44)$$

Тут $y_{i,pk}$, $y_{i,mk}^{/}$ (i=1÷6) – компоненти, розкладених за тригонометричними рядами Фур'є, складових напружено-деформованого стану оболонки: σ_{rr}, τ_{rz}, $\tau_{r\theta}$, u_r, u_z, u_θ, а p, m, k – хвильові числа в рядах. Параметр $l_m = {m\pi}/{L}$, де L – довжина твірної циліндра (рис. 1).

Після математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (40) за допомогою співвідношень (44), отримаємо для кожного i-го шару нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr}=\left(T^i(r)-\omega^2 C^i(r)\right)\bar{y}^i,\ T^i(r)=t_{n,l}^i(r),\ C^i(r)=c_{n,l}^i(r),$$
$$n=\overline{1,\infty},\ l=\overline{1,\infty}, \quad (45)$$

де

$\bar{y}^i=\{y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/};$ $y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/}\}$ – розв'язуюча вектор-функція, $T^i(r)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r, $C^i(r)$ – матриця, що характеризує інерційні властивості оболонки. Ненульові елементи матриці $T^i(r)$, коефіцієнти при невідомих системи (45) $t_{n,l}^i(r)$, без докритичних напружень, приведені в [13]. Ненульові елементи матриці $C^i(r)$ мають вигляд:

$$c_{1,4}^i = \rho\,,\quad c_{2,5}^i = \rho\,,\quad c_{3,6}^i = \rho\,,\quad c_{7,10}^i = \rho\,,\quad c_{8,11}^i = \rho\,,\quad c_{9,12}^i = \rho\,. \qquad (46)$$

До системи рівнянь (45) необхідно приєднати відповідні рівняння, що характеризують умови закріплення поверхонь оболонки, перпендикулярних напрямку інтегрування:

$$B_1 \bar{y}(r,\lambda) = 0\,; \qquad r = r_1\,; \qquad (47)$$

$$B_2 \bar{y}(r,\lambda) = 0\,; \qquad r = r_2\,, \qquad (48)$$

де B_1, B_2 – прямокутні матриці, що формуються на основі прийнятих граничних умов на поверхнях оболонки (41).

Розв'язок крайової задачі (45), (47) – (48) полягає у знаходженні власних частот вільних коливань ω та відповідних їм форм $\bar{y}(r_i)$, *i*=1, 2 як гармонійних складових динамічного стану. В матриці T розкладання шуканих векторів в ряди Фур'є за коловою координатою враховується параметром *n*=0, 1, 2,… колового хвилеутворення оболонки. Внаслідок чого задача (45), (47) – (48) за [31, 32, 33] призводиться до розв'язку послідовності одновимірних крайових задач на власні значення виду:

$$\frac{d\bar{y}_n^i}{dr_1} = (T_n^i(r_1) - \omega_n^2 C^i(r_1))\,\bar{y}_n^i\,, \qquad (49)$$

Таким чином, для однорідної крайової задачі (49), (47), (48) необхідно знайти величину параметра ω, при якому задача має нетривіальний розв'язок $y \neq 0$.

Реалізація отриманої одновимірної задачі (49) про вільні коливання товстостінної циліндричної оболонки проводилась при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [10÷12]. Він також був використаний в [13÷18, 32], де метод був відповідно адаптований для розв'язання задач розрахунків анізотропних товстостінних і тонких композитних циліндричних оболонок.

Реалізація пропонованої методики встановлення частот вільних коливань товстостінної композитної анізотропної циліндричної оболонки. Тестування результатів розв'язку задач визначення частот вільних коливань циліндричних оболонок з ізотропного та ортотропного матеріалів, проведено на основі порівнянь отриманих результатів з даними [33] для:

1. Одношарова оболонка з ізотропного матеріалу з наступними геометричними та механічними характеристиками: радіус серединної

поверхні R=1,0м; довжина L=2,0м; товщина h=0,01м; $E=E_0$; $\nu=0{,}3$; $\rho = \rho_0$.

2. Одношарова оболонка з ортотропного матеріалу з наступними геометричними та механічними характеристиками: радіус серединної поверхні R=1,0м; довжина L=3,0м; товщина h=0,01м; $E_{11}=176E_0$; $E_{22}=176E_0$; $E_{33}=7E_0$; $G_{12}=3{,}5E_0$; $G_{13}= G_{23}=1{,}4E_0$; $\nu_{12}= \nu_{13}= \nu_{23}=0{,}25$; $\rho=2\rho_0$.

В табл. 1 приведені значення $\overline{\omega} = \omega^2 \rho_0 / E_0 \cdot 10^7$, що відповідають мінімальним частотам власних коливань для описаних вище циліндрів та параметри хвилеутворення n в коловому напрямку.

Таблиця 1

Порівняння результатів дослідження вільних коливань циліндричної оболонки

Номер варіанту оболонки	Результати [33]		Представлений підхід		Розходження Δ, %
	$\overline{\omega}$	n	$\overline{\omega}$	n	
1	13,8	5	13,8	5	0,0
2	214	3	214	3	0,0

Аналіз приведених в табл. 1 даних вказує на співпадіння результатів розрахунків частот власних вільних коливань і відповідних їм форм.

В якості представлення можливостей пропонованого в роботі підходу було вибрано такий об'єкт дослідження. Це – циліндрична товстостінна анізотропна оболонка, що виготовлена з композитного волокнистого матеріалу (рис. 1). Головні напрямки пружності попередньо ортотропного матеріалу можуть бути повернуті на кут ψ відносно напряму твірної оболонки (рис. 1). При цьому представлені результати дослідження впливу зміни товщини циліндра на частоти вільних коливань.

Матеріалом оболонки є боропластик з такими механічними та фізичними характеристиками: $E_{11}=280E_0$, $E_{22}=E_{33}=31E_0$, $G_{12}=G_{23}=10{,}5E_0$, $G_{13}=21{,}2E_0$, $\nu_{21}=0{,}25$, $\nu_{12}=0{,}0277$, E_0=10000МПа [34], ρ=2118кг/м^3 [27].

Геометричні розміри конструкції такі: довжина L=1,2м, а радіуси внутрішньої r_1 та зовнішньої r_2 бічних поверхонь оболонок приймають наступні значення: перший варіант – r_1=0,585м, r_2=0,615м; другий – r_1=0,57м, r_2=0,63м; третій – r_1=0,54м, r_2=0,66м.

Дослідження частот вільних коливань анізотропної товстостінної циліндричної оболонки проводилось з урахуванням збільшення її товщини та змінного кута ψ їх укладання матеріалу від 0^0 до 90^0. Також представлені результати ортотропного варіанту розрахунку цього ж циліндра з урахуванням того, що в прийнятому узагальненому законі Гука механічні характеристики c_{16}, c_{26}, c_{36}, a_{45} приймають нульові значення.

Результати проведених, за пропонованою методикою, досліджень представлені в табл. 2, де наведені значення частот вільних коливань ω та параметр хвилеутворення у напрямку твірної n та на рис. 2. Позначення графіків на рисунках таке: 1 – крива, що характеризує зміну частот вільних коливань циліндра товщиною h=0,03м; 2 – h=0,06м; 3 – h=0,12м, ті самі позначення із штрихами характеризують ортотропний розрахунок.

Таблиця 2

Дослідження частот вільних коливань товстостінного циліндра

Товщина h, м	Під-хід	Кут ψ									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
		Мінімальні частоти власних коливань $\omega \cdot 10^{-2}$, $с^{-1}$ (кількість хвиль n)									
0,03	Анізот-ропний	200,55 (3)	230,32 (4)	268,71 (4)	285,84 (3)	271,36 (3)	262,21 (3)	255,07 (3)	246,80 (3)	231,52 (2)	222,61 (2)
	Ортот-ропний	200,55 (3)	233,50 (4)	275,28 (4)	295,33 (4)	285,53 (3)	256,48 (3)	252,37 (3)	252,87 (3)	248,73 (3)	222,61 (2)
0,06	Анізот-ропний	271,05 (3)	302,80 (3)	362,89 (3)	396,60 (3)	393,78 (3)	381,25 (2)	338,94 (2)	298,60 (2)	269,46 (2)	258,38 (2)
	Ортот-ропний	271,05 (3)	309,70 (3)	376,88 (3)	411,02 (3)	395,12 (3)	392,43 (3)	353,48 (2)	324,59 (2)	287,60 (2)	258,38 (2)
0,12	Анізот-ропний	357,23 (2)	395,56 (2)	469,04 (2)	530,53 (2)	508,02 (2)	466,70 (2)	425,57 (2)	382,83 (2)	352,33 (2)	341,80 (2)
	Ортот-ропний	357,23 (2)	409,75 (2)	503,65 (2)	578,49 (2)	547,75 (2)	461,80 (2)	425,37 (2)	400,63 (2)	366,73 (2)	341,80 (2)

З табл. 2 та рис. 2 слід зробити такий висновок, що мінімальні частоти вільних коливань змінюються із зміною кута повороту ψ. Незалежно від товщини циліндричної оболонки, найбільші значення ω для приведених умов закріплення та матеріалу мають місце при $\psi=30^0$ як для випадку урахування всіх компонентів узагальненого закону Гука для даного типу анізотропії, так і для ортотропного підходу. При цьому розбіжність між величинами вільних коливань при $\psi=0^0$ та $\psi=30^0$ складає від 42% для оболонки товщиною h=0,03м до 62% для h=0,12м.

Слід зазначити, що значення частот вільних коливань, знайдені за ортотропним підходом, вищі величин, що вирахувані при урахуванні всіх компонентів узагальненого закону Гука для приведеного типу анізотропії. Максимальні розбіжності тут складають від 5% при $\psi=40^0$ для циліндра товщиною h=0,03м до 9% при $\psi=30^0$ для h=0,12м.

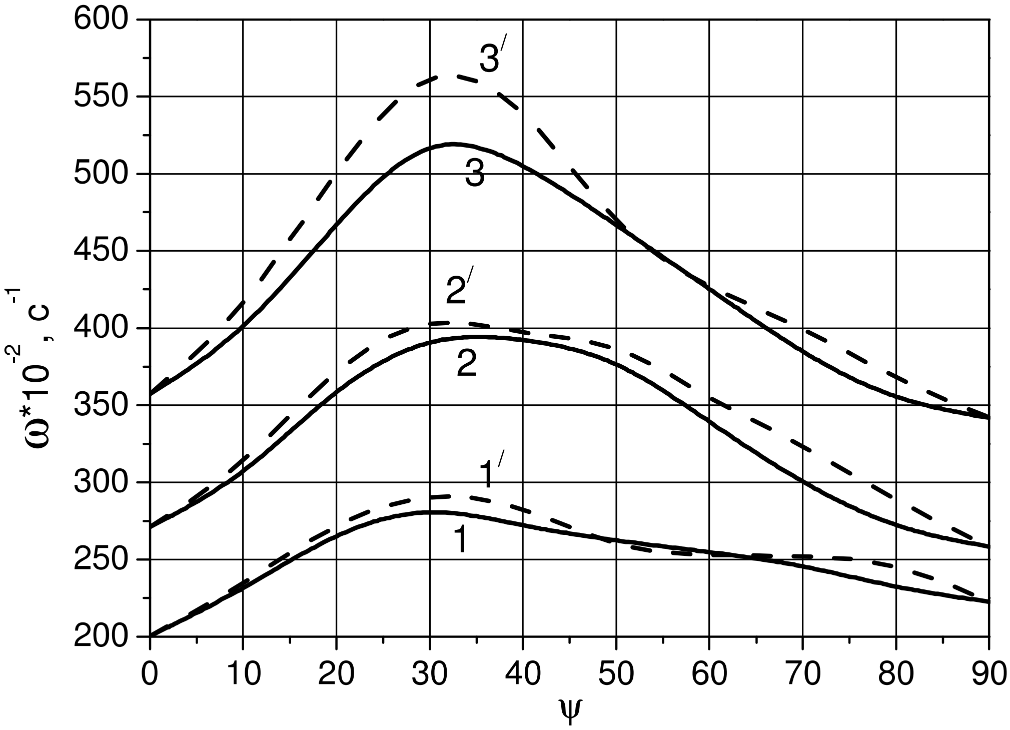

Рис. 2. Частоти вільних коливань товстостінного циліндра.

З аналізу приведених результатів також можливо зробити висновок: збільшення товщини анізотропної оболонки в два рази від h=0,03м до h=0,06м призводить до зростання величин мінімальних частот вільних коливань максимум на 45%. При подальшій зміні товщини циліндра від h=0,06м до h=0,12м величини частот вільних коливань ω максимально зростають на 33%.

Висновки. В роботі, спираючись на модифікований варіаційний принцип Ху-Васідзу, отримана тривимірна система однорідних диференціальних рівнянь руху в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат. Для приведення її до одновимірної було використано метод Бубнова-Гальоркіна. Ним апроксимовано невідомі системи рівнянь вздовж твірної та в коловому напрямках. Для розв'язку одновимірної задачі в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки було використано метод дискретної ортогоналізації.

Досліджено частоти вільних коливань анізотропної товстостінної композитної циліндричної оболонки. Проведено аналіз зміни частот вільних коливань оболонки в залежності від зміни кута повороту головних напрямів пружності однонапрямленого волокнистого матеріалу та товщини циліндра.

1. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.

Abovskiy N.P., Andreyev N.P., Deruga A.P. Variatsionnyye printsipy teorii uprugosti i teorii obolochek. – M.: Nauka, 1978. – 288 s.

2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Vasidzu K. Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. – M.: Mir, 1987. – 542 s.

3. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2010. – 352 с.

Bazhenov V.A., Semenyuk M.P., Trach V.M. Neliniyne deformuvannya, stiykistʹ i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok: Monohrafiya. – K.: Karavela. – 2010. – 352 s.

4. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.

Lantsosh K. Variatsionnyye printsipy mekhaniki. – M.: Mir, 1965. – 408 s.

5. Тонти Э. Вариационные принципы в теории упру гости. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей. – 1969. – 5. 117. – С. 124-138.

Tonti E. Variatsionnyye printsipy v teorii uprugosti. Mekhanika. Period. sb. perev. inostr. statey. – 1969. – 5, 117. – S. 124-138.

6. Reissner O. On a variational theorem in elasticity. J. Math. And Phys. – 1950. – 29, N2. – P. 90-95.

7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike.– M.: Mir, 1975. – 541 s.

8. Сахаров А.С., Альтенбах И., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. Альтенбах И., Габберт У., Данкерт Ю., Кепплер Х., Кочык Э. Метод конечных элементов в механике твердых тел. К. Лейпциг Вища школа - ФЕБ Фахбухферлаг 1982г. 480 с.

Sakharov A.S., Al'tenbakh I., Kislookiy V.N., Kirichevskiy V.V. Al'tenbakh I., Gabbert U., Dankert YU., Keppler KH., Kochyk E. Metod konechnykh elementov v mekhanike tverdykh tel. K. Leyptsig Vishcha shkola - FEB Fakhbukhferlag 1982g. 480 s.

9. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури: Монографія. - К.: Віпол, 2010. - 315 с.

Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovey M.O. Neliniyne deformuvannya ta stiykistʹ pruzhnykh obolonok neodnoridnoyi struktury: Monohrafiya. - K.: Vipol, 2010. - 315 s.

10. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A.Ya., Zakhariychenko L.I. Calculation of Stress-Strain State of Orthotropic Closed and Open Non-Circular Cylindrical Shells //Int.Appl.Mech.- 2005. – 41, N7. – P.778-785.

11. Grigorenko Ya.M., Kryukov N.N., Yakovenko N.S. Using Spline Functions to Solve Boundary-Value Problems for Laminated Orthoyropic Trapezoidal Plates of Variable Thickness //Int.Appl.Mech.- 2005. – 41, N4. – P.413-420.

12. Grigorenko Ya.M., Rozhok L.S. Stress Solution for Transversely Isotropic Corrugated Hollow Cylinders //Int.Appl.Mech.- 2005. – 41, N3. – P.277-282.

13. Podvornyi A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. P. 623 – 638.

14. Semenyuk, N.P., Trach, V.M., Podvornyi, A.V. Stability of cylindrical anisotropic shells under axial pressure in three-dimensional statement. Strength of Materials and Theory of Structures, issue 94, KNUBA (2015), pp. 192–206.

15. Semenyuk, N.P., Trach, V.M., Podvornyi, A.V. Stress-strain state of thick-walled anisotropic cylindrical shells under thermal power load, protected by the functionally graded material. Strength of Materials and Theory of Structures, issue 105, KNUBA (2020), pp. 165–178.

16. Trach V., Semenyuk M., Podvornyi A. Stability of anisotropic cylindrical shells in three-dimensional state under axial compression. Acta Sci. Pol. Arch. 15 (4) 2016, pp. 169-183.

17. Podvornyi A. The stability of anisotropic cylindrical shells under torsion in spatial position. Acta Sci. Pol. Arch. 19 (1) 2020, pp. 103-109.

18. Трач В.М., Семенюк М.П., Подворний А.В. Використання 3D методики до розрахунку напруженого стану шаруватих анізотропних циліндричних оболонок під дією бокового тиску. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. Випуск 37. – НУВГП.- Рівне – 2019.- С. 296-306.

Trach V.M., Semenyuk M.P., Podvornyy A.V. Vykorystannya 3D metodyky do rozrakhunku napruzhenoho stanu sharuvatykh anizotropnykh tsylindrychnykh obolonok pid diyeyu bokovoho tysku. Resursoekonomni materialy, konstruktsiyi, budivli ta sporudy: Zbirnyk naukovykh prats′. Vypusk 37. – NUVHP.- Rivne – 2019.- S. 296-306.

19. Рассказов А.О., Соколовская Н.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.

Rasskazov A.O., Sokolovskaya N.I., Shul'ga N.A. Teoriya i raschet sloistykh ortotropnykh plastin i obolochek. – Kiyev: Vishcha shk., 1986. – 191 s.

20. Бениаминов Д.М. Уравнения смешанного метода в теории упругости. Строительная механика и расчет сооружений. – 1975. - №5. – С. 43-46.

Beniaminov D.M. Uravneniya smeshannogo metoda v teorii uprugosti. Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. – 1975. - №5. – S. 43-46.

21. Семенюк М. П., Трач В. М., Жукова Н. Б.Модифікація принципу Ху-Васидзу стосовно одного методу розв’язання задач теорії пружності. Доп. НАН України. – 2006. – No 12. – С. 52–59.

Semenyuk M. P., Trach V. M., Zhukova N. B.Modyfikatsiya pryntsypu Khu-Vasydzu stosovno odnoho metodu rozv″yazannya zadach teoriyi pruzhnosti. Dop. NAN Ukrayiny. – 2006. – No 12. – S. 52–59.

22. Трач В.М. Об одном вариационном принципе теории упругости. Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки. – Донецьк. 2006. – №1. – С. 126-130.

Trach V.M. Ob odnom varyatsyonnom pryntsype teoryy upruhosty. Visnyk Donets′koho universytetu. Seriya A. Pryrodnychi nauky. – Donets′k. 2006. – №1. – S. 126-130.

23. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.

Shul'ga N.A. Osnovy mekhaniki sloistykh sred periodicheskoy struktury. – K.: Nauk. dumka, 1981. – 200 s.

24. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. - 374 с.

Novozhilov V.V. Teoriya uprugosti. – L.: Sudpromgiz, 1958. - 374 s.

25. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961, - 384 с.

Ambartsumyan S.A. Teoriya anizotropnykh obolochek. – M.: Gosudarstvennoye izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1961, - 384 s.

26. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Lekhnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. – 2-ye izd., ispr. i dop. – M.: Nauka, 1977. – 415 s.

27. Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б. Колебания анизотропных оболочек. В кн. Механика композитов: В 12 т.: Т.9. Динамика элементов конструкций. В.Д. Кубенко, А.Э. Бабаев, Е.И. Беспалова и др.- К.: «А.С.К.», 1999. - 379 с.

Bespalova Ye.I., Kitaygorodskiy A.B. Kolebaniya anizotropnykh obolochek. V kn. Mekhanika kompozitov: V 12 t.: T.9. Dinamika elementov konstruktsiy. V.D. Kubenko, A.E. Babayev, Ye.I. Bespalova i dr.- K.: «A.S.K.», 1999. - 379 s.

28. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. - 336 с.

Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T. Zadachi statiki anizotropnykh neodnorodnykh obolochek.- M.: Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., 1992. - 336 s.

29. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Статика анизотропных толстостенных оболочек. – К.: Высшая школа, 1985. – 190 с.

Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Statika anizotropnykh tolstostennykh obolochek. – K.: Vysshaya shkola, 1985. – 190 s.

30. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel. – K.: Nauk. dumka, 1991. – 216 s.

31. Трач В.М., Подворний А.В. Вільні коливання циліндричних оболонок із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Матеріали VII міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2007» 25-27 квітня, Т.1, Київ – 2007. С. 14.62-14.65.

Trach V.M., Podvornyy A.V. Vilʹni kolyvannya tsylindrychnykh obolonok iz materialu z odniyeyu ploshchynoyu pruzhnoyi symetriyi. Materialy VII mizhnarodnoyi naukovo-tekhnichnoyi konferentsiyi «AVIA-2007» 25-27 kvitnya, T.1, Kyyiv – 2007. S. 14.62-14.65.

32. Трач В.М., Подворний А.В., Бондарський О.Г. Вільні коливання анізотропних оболонок обертання нульової гаусової кривизни із матеріалу з однією площиною пружної симетрії. Міжвузівський збірник «Наукові нотатки», Луцьк: ЛДТУ (жовтень 2007). – Випуск 20 (2). С 222-226.

Trach V.M., Podvornyy A.V., Bondarsʹkyy O.H. Vilʹni kolyvannya anizotropnykh obolonok obertannya nulʹovoyi hausovoyi kryvyzny iz materialu z odniyeyu ploshchynoyu pruzhnoyi symetriyi. Mizhvuzivsʹkyy zbirnyk «Naukovi notatky», Lutsʹk: LDTU (zhovtenʹ 2007). – Vypusk 20 (2). S 222-226.

33. Григоренко Я.М., Беспалова Е.И., Китайгородский А.Б. Шинкарь А.И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. Киев: Наукова думка, 1986г, 171с.

Grigorenko YA.M., Bespalova Ye.I., Kitaygorodskiy A.B. Shinkar' A.I. Svobodnyye kolebaniya elementov obolochechnykh konstruktsiy. Kiyev: Naukova dumka, 1986g, 171s.

34. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. Композиционные материалы: справочник. Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990, 512 с.

Vasil'yev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V. i dr. Kompozitsionnyye materialy: spravochnik. Pod obshch. red. V. V. Vasil'yeva, YU. M. Tarnopol'skogo. M.: Mashinostroyeniye, 1990, 512 s.