

**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КОЛОВОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО КОФЕРДАМУ ПІД ДІЄЮ ГІДРОСТАТИЧНОГО ТИСКУ**

**STRESS-STRAIN STATE OF A CIRCULAR CYLINDRICAL COFFERDAM UNDER THE INFLUENCE OF HYDROSTATIC PRESSURE**

**Трач В.М., д.т.н., професор, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Подворний А.В., к.т.н., доцент, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, Хоружий М.М., к.т.н., ORCID ID: 0000-0002-4546-9270** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

**Trach V.M., doctor of technical sciences, professor. ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, Podvornyi A.V., PhD., associate professor. ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, Khoruzhyi M.M., PhD., ORCID ID: 0000-0002-4546-9270** (National university of water management and nature resources use, Rivne)

В роботі, спираючись на тривимірну систему диференціальних рівнянь рівноваги в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла, встановлено параметри, що описують напружено-деформований стан колового циліндричного кофердаму, який знаходиться в полі дії гідростатичного тиску. Співставлено величини напружень та перемішень для одношарової сталевій конструкції та двошарової із зовнішнім шаром з волокнистого композиту.

In this work, based on a three-dimensional system of differential equilibrium equations in partial derivatives of the linear theory of elasticity of an anisotropic body, are established parameters that describe the stress-strained state of a circular cylindrical cofferdam located in the field of hydrostatic pressure. To reduce a three-dimensional system to a one-dimensional one, the Bubnov-Galerkin method was used, which approximated unknown systems of equations along the generatrix and took into account that the shell is deformed taking into account axial symmetry in the circular direction. To solve the resulting one-dimensional problem in the direction of the normal to the middle surface of the shell, the discrete orthogonalization method was used.

The effect of strengthening the structure with a composite unidirectional fibrous material, the main elastic directions of which can be at an angle to the generatrix of the cylinder, is analyzed. The values of the stress and displacement components are compared for a single-layer steel structure and a two-layer steel and fiber composite structure.

**Ключові слова:** Кофердам, тривимірна постановка, анізотропний матеріал, напружено-деформований стан.  
Cofferdam, three-dimensional setting, anisotropic material, stress-strain state.

**Вступ.** Аналіз останніх досліджень. Будівництво сучасних мостових споруд є складною технічною проблемою. Це пов'язано із тим, що мости можуть значно простягатись через заплави та річки, тому виникає необхідність встановлення проміжних опорних споруд, наприклад, у водоймі. Одним з основних методів будівництва опор в воді є використання так званих кофердамів. Кофердам – це тимчасова конструкція, що забезпечує герметичність та встановлюється безпосередньо в місці установки опори мосту, прямо у воді. Після її монтажу з неї відкачується вода і створюється суха зона для проведення необхідних будівельних робіт з встановлення, наприклад, залізобетонної опори.

В даний час для огороження місця влаштування опор мостів у воді широко використовуються конструкції зібрані із шпунтів Ларсена [1], що утворюють ребристе огороження майданчика. Однак представляє інтерес випадок використання в якості огороження колової циліндричної конструкції із сталі захищеної від дії агресивного середовища шаром композитного матеріалу, який також може слугувати й підкріплюючим шаром.

В представленій роботі приведено підхід стосовно дослідження напружено-деформованого стану колового циліндричного кофердаму під тиском води на основі тривимірних диференціальних рівнянь рівноваги просторової теорії пружності. Матеріалом тимчасової конструкції прийнято метал захищений від корозійного впливу води та одночасно підкріплений шаром однонапрявленого волокнистого композитного матеріалу. Вкажемо на те, що волокнистий композит утворює шар ортотропного матеріалу головні напрями пружності якого можуть не збігатись із осями циліндричної системи координат конструкції кофердаму (рис. 1). Отриманий матеріал в осях циліндричної конструкції необхідно розглядати як такий, що має одну площину пружної симетрії, яка є паралельною до її серединної поверхні [2, 3, 4, 5].

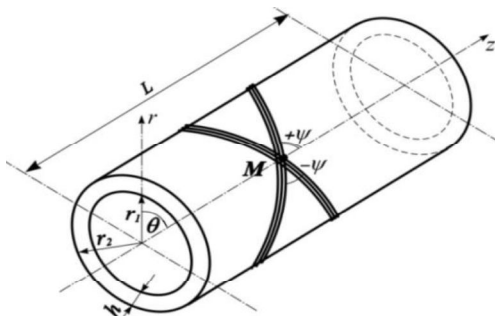


Рис. 1. Анізотропна циліндрична конструкція

Постановка мети і задач досліджень. Для вирішення поставленої задачі дослідження напружено-деформованого стану кофердаму змодельовано його у вигляді анізотропної шаруватої циліндричної оболонки та скористаємось тривимірною системою з шести диференціальних рівнянь рівноваги лінійної теорії пружності у вигляді [5]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} &= -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \\
 &\frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} &= c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \\
 &-\frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta}; \\
 \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} &= \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\
 &-\frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2}; \\
 \frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\
 \frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} = a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + \frac{1}{r} u_\theta^i. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Тут  $r$  – радіус циліндра, який не залежить від координат  $z$  та  $\theta$ ;  $\sigma_{rr}^i$ ,  $\tau_{rz}^i$ ,  $\tau_{r\theta}^i$  – напруження;  $u_z^i$ ,  $u_\theta^i$ ,  $u_r^i$  – переміщення оболонки за напрямками відповідно осей  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$  кожного  $i$ -го шару. Сталі  $c_{kl}^i$  ( $k, l=1, 2, 3, 6$ ) – це характеристики матеріалу оболонки, що визначаються за допомогою механічних констант  $a_{kl}^i$  [6]:

$$c_{11}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left( a_{22}^i a_{66}^i - a_{26}^i{}^2 \right); \quad c_{12}^i = \frac{1}{|A_{22}^i|} \left( a_{16}^i a_{26}^i - a_{12}^i a_{66}^i \right);$$

$$\begin{aligned}
c_{22}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} \left( a_{11}^i a_{66}^i - a_{16}^{i2} \right); & c_{16}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} \left( a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i \right); \\
c_{26}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} \left( a_{12}^i a_{16}^i - a_{11}^i a_{26}^i \right); & c_{66}^i &= \frac{1}{|A_{22}^i|} \left( a_{11}^i a_{22}^i - a_{12}^{i2} \right); \\
c_{36}^i &= a_{13}^i c_{16}^i + a_{23}^i c_{26}^i + a_{36}^i c_{66}^i; & c_{33}^i &= a_{33}^i - \left( a_{13}^i c_{13}^i + a_{23}^i c_{23}^i + a_{36}^i c_{36}^i \right); \\
c_{13}^i &= a_{13}^i c_{11}^i + a_{23}^i c_{12}^i + a_{36}^i c_{16}^i; & c_{23}^i &= a_{13}^i c_{12}^i + a_{23}^i c_{22}^i + a_{36}^i c_{26}^i. \quad (2)
\end{aligned}$$

Система (1) записана в частинних похідних відносно шести компонентів значень векторів напружень та перемішень і може бути використана для дослідження напружено-деформованого стану анізотропної композитної циліндричної оболонки.

Зв'язок між складовими деформацій та переміщеннями такий [7]:

$$\begin{aligned}
e_{zz}^i &= \frac{\partial u_z^i}{\partial z}; & \varepsilon_{\theta\theta}^i &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_r^i; & e_{rr}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial r}; \quad (3) \\
e_{z\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta}; & e_{rz}^i &= \frac{\partial u_r^i}{\partial z} + \frac{\partial u_z^i}{\partial r}; & e_{r\theta}^i &= \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} - \frac{1}{r} u_\theta^i + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

Тут  $e_{zz}^i$ ,  $e_{\theta\theta}^i$ ,  $e_{rr}^i$  – відносні лінійні деформації за напрямками координатних осей  $z$ ,  $\theta$ ,  $r$ , а  $e_{z\theta}^i$ ,  $e_{rz}^i$ ,  $e_{r\theta}^i$  – дотичні до відповідної координатної поверхні відносні зсувні деформації.

Співвідношення узагальненого закону Гука, без урахування доданків, що враховують температурну дію, для матеріалу з однією площиною пружної симетрії, запишемо у вигляді [5]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^i &= c_{11}^i e_{zz}^i + c_{12}^i e_{\theta\theta}^i + c_{16}^i e_{z\theta}^i - c_{13}^i \sigma_{rr}^i; \\
\sigma_{\theta\theta}^i &= c_{12}^i e_{zz}^i + c_{22}^i e_{\theta\theta}^i + c_{26}^i e_{z\theta}^i - c_{23}^i \sigma_{rr}^i; \\
\tau_{z\theta}^i &= c_{16}^i e_{zz}^i + c_{26}^i e_{\theta\theta}^i + c_{66}^i e_{z\theta}^i - c_{36}^i \sigma_{rr}^i; \\
e_{rr}^i &= c_{13}^i e_{zz}^i + c_{23}^i e_{\theta\theta}^i + c_{36}^i e_{z\theta}^i + c_{33}^i \sigma_{rr}^i; \\
e_{rz}^i &= a_{45}^i \tau_{r\theta}^i + a_{55}^i \tau_{rz}^i; & e_{r\theta}^i &= a_{44}^i \tau_{r\theta}^i + a_{45}^i \tau_{rz}^i. \quad (4)
\end{aligned}$$

Розв'язок системи (1), відповідно до поставленої в роботі задачі, повинен відповідати умовам на бічних поверхнях при  $r=r_1$

$$\sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \quad \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0$$

і  $r=r_2$

$$\sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = \pm q_r^n(z); \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0. \quad (5)$$

Умовам на торцях (рис. 1) при  $z=0$

$$\tau_{rz}^i = \tau_{z\theta}^i = u_z^i = 0$$

і  $z=L$

$$\sigma_{zz}^i = u_r^i = u_\theta^i = 0. \quad (6)$$

Та умовам жорсткого контакту шарів для напружень та перемішень

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^i(r_i) &= \sigma_{rr}^{i+1}(r_i); & \tau_{rz}^i(r_i) &= \tau_{rz}^{i+1}(r_i); & \tau_{r\theta}^i(r_i) &= \tau_{r\theta}^{i+1}(r_i); \\ u_r^i(r_i) &= u_r^{i+1}(r_i); & u_z^i(r_i) &= u_z^{i+1}(r_i); & u_\theta^i(r_i) &= u_\theta^{i+1}(r_i), \end{aligned} \quad (7)$$

де  $i$  – номер шару оболонки.

В (5)  $q_r^n(z)$  – розподілений на зовнішній боковій поверхні оболонки тиск.

Методика досліджень.

Для розв'язку тривимірної системи рівнянь (1) при відповідних умовах на поверхнях і торцях відповідно (5), (6) скористаємося процедурою методу Бубнова-Гальоркіна. Згідно з нею, розкладемо всі функції в тригонометричні ряди [5] за координатою вздовж твірної циліндра  $z$  так, що б вони задовольняли крайовим умовам (6):

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{1, pk}(r) \cos k\theta + y'_{1, mk}(r) \sin k\theta \right] \sin l_m z; \\ \tau_{rz}(r, z, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{2, pk}(r) \cos k\theta + y'_{2, mk}(r) \sin k\theta \right] \cos l_m z; \\ \tau_{r\theta}(r, z, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ y_{3, pk}(r) \sin k\theta + y'_{3, mk}(r) \cos k\theta \right] \sin l_m z; \end{aligned} \quad (8)$$

Тут  $y_i, pk, y'_{i, mk}$  ( $i=1\div 6$ ) – компоненти, розкладених за тригонометричними рядами Фур'є, складових напружено-деформованого стану оболонки:  $\sigma_{rr}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}, u_r, u_z, u_\theta$ , а  $p, m, k$  – хвильові числа в рядах. Параметри  $l_m = m\pi/2L$ , де  $L$  – довжина твірної циліндра (рис. 1).

Після математичних перетворень і розділення змінних в рівняннях (1) за допомогою співвідношень (8), отримаємо для кожного  $i$ -го шару систему звичайних диференціальних рівнянь дванадцятого порядку в нормальній формі Коші

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = T^i(r)\bar{y}^i + f^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r); \quad (n, l = 1 \div 12), \quad (9)$$

де  $\bar{y}^i = \left\{ y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/} \right\}$  – розв’язуюча вектор-функція, а  $f^i$  – навантаження. Елементи матриці  $T^i(r)$ , системи (9), приведені в [8].

Реалізація отриманої одновимірної задачі про напружено-деформований стан шаруватої циліндричної оболонки проводилась при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [2].

Розв’язок системи (9), при урахуванні граничних умов на бічних поверхнях (5) стосовно визначення компонентів напружено-деформованого стану: напружень  $\sigma_{rr}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{r\theta}$  та переміщень  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $u_\theta$  проводимо при використанні тригонометричних рядів (8) шляхом підстановки відповідної координати  $z$  за довжиною твірної циліндра  $0 \leq z \leq L$ .

Напруження  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\tau_{z\theta}$  для прийнятого виду матеріалу, виразимо через розв’язуючі функції узагальненого закону Гука (4) скориставшись геометричними співвідношеннями (3).

Реалізація запропонованої методики. В якості представлення можливостей запропонованого в роботі підходу було вибрано об’єкт дослідження – циліндричний кофердам. Змодельовано два варіанти такої конструкції: одношарова сталева та двошарова циліндрична оболонка внутрішній сталевий шар якої підкріплений та одночасно захищений від корозійного впливу води зовнішнім шаром композитного волокнистого матеріалу боропластику головні напрямки пружності якого можуть бути повернуті на кут  $\psi$  відносно напрямку твірної оболонкової конструкції.

Механічні характеристики матеріалів, що використано при виготовленні кофердаму такі: сталь –  $E_{11}=20,6E_0$ ,  $\nu_{21}=0,25$ ; боропластик –  $E_{11}=280E_0$ ,  $E_{22}=E_{33}=31E_0$ ,  $G_{12}=G_{23}=10,5E_0$ ,  $G_{13}=21,2E_0$ ,  $\nu_{21}=0,25$ ,  $\nu_{12}=0,0277$ ,  $E_0=10000$ МПа.

Геометричні розміри конструкції наступні: радіус внутрішньої бокової поверхні  $r_1=4,95$ м, зовнішньої –  $r_2=5,05$ м, а довжина  $L=8,0$ м. У випадку двошарової конструкції геометричні характеристики за товщиною такі: сталевий шар  $r_{1s}=4,95$ м;  $r_{2s}=5,04$ м, шар боропластику:  $r_{1b}=5,04$ м;  $r_{2b}=5,05$ м, довжина така ж.

Оболонкова конструкція знаходиться під дією зовнішнього розподіленого бокового тиску змінної інтенсивності від  $q_0=0,08$ МПа при  $z=0$  до  $q_0=0$  при  $z=L$ .

Проведено дослідження напруженого стану одношарової циліндричної оболонки та порівняно із результатами для двошарової при зміні кута  $\psi$  армування волокнистого композиту боропластику від  $0^0$  до  $90^0$ .

Результати проведених за пропонованою методикою досліджень представлені в таблиці 1. Показано результати дослідження превалюючих для такого типу роботи конструкції напружень в коловому напрямку  $\sigma_{\theta\theta}$  та переміщень в радіальному  $u_r$  при координаті  $z=0$  циліндричної конструкції, тобто на рівні нижнього торця кофердаму.

Таблиця 1

Компоненти напружено-деформованого стану  
циліндричного кофердаму

Параметр НДС	Сталевий кофердам	Двошаровий кофердам						
		Кут повороту головних напрямів пружності шару боропластику, $\psi^0$						
		0	15	30	45	60	75	90
$\sigma_{\theta\theta}$ , [МПа]	-4,01	-37,94	-37,89	-37,91	-38,93	-39,79	-40,03	-40,09
$u_r \cdot 10^4$ , [м]	-18,07	-1,14	-1,21	-1,27	-0,80	-0,33	-0,33	-0,14

Аналіз результатів дослідження значень компонент напружено-деформованого стану циліндричного кофердаму вказує на таке. Використання зовнішнього підкріплюючого шару волокнистого композиту боропластику призводить до збільшення максимальних значень нормальних напружень в коловому напрямку  $\sigma_{\theta\theta}$  на порядок у порівнянні з одношаровою сталеву конструкцією. Водночас значення переміщень в радіальному напрямку  $u_r$  зменшуються. При чому величини  $u_r$  суттєво залежать від кута повороту головних напрямів пружності волокнистого композиту. Так при  $\psi=0^0$  розглядуване переміщення менше у півтора рази порівняно із одношаровою конструкцією, а при  $\psi=90^0$  значення  $u_r$  підкріпленого кофердаму складають менше 1% від отриманих для одношарового сталевого.

**Висновки.** В представленій роботі, спираючись на тривимірну систему диференціальних рівнянь рівноваги в частинних похідних для анізотропної шаруватой циліндричної оболонки змодельовано напружено-деформований стан конструкції кофердаму підсиленого шаром волокнистого композиту. Для приведення тривимірної системи до одновимірної було використано метод Бубнова-Гальоркіна, яким апроксимовано невідомі системи рівнянь вздовж

твірної та врахована періодичність розв'язуючих функцій в коловому напрямку. Для розв'язку одновимірної задачі в напрямку нормалі до серединної поверхні оболонки було використано метод дискретної ортогоналізації.

Досліджено вплив на величини превалюючих напружень та переміщень кофердаму підсилення шаром однонапрявленого композитного матеріалу, а також кута його укладання відносно твірної конструкції.

1. ДБН В.2.3-22:2009 «Мости та труби. Основні вимоги проектування». DBN V.2.3-22:2009 «Mosty ta truby. Osnovni vumohy proektuvannya».
2. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. К.: Каравела, 2010. 352 с.  
Bazhenov V.A., Semenyuk M.P., Trach V.M. Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok: Monohrafiya. K.: Karavela, 2010. 352 s.
3. Трач В.М., Подворний А.В., Хоружий М. М. Деформування та стійкість нетонких анізотропних оболонок: Монографія. К.: Каравела, 2019. 273 с.  
Trach V.M., Podvorniy A.V., Khoruzhyy M.M. Deformuvannya ta stiykist' netonkykh anizotropnykh obolonok: Monohrafiya. K.: Karavela, 2019. 274 s.
4. Трач В.М., Подворний А.В., Мерзлюк В.В. 3D-модель напруженого стану товстостінної анізотропної циліндричної оболонки при крученні. Міжнародна конференція «Впровадження інноваційних матеріалів і технологій в рамках програми «Велике будівництво». Київ. НТУ. 2022. С. 171-176.  
Trach V.M., Podvornyy A.V., Merzlyuk V.V. 3D-model' napruzhenoho stanu товстостинной anizotropnoyi tsylindrichnoyi obolonky pry kruchenni. Mizhnarodna konferentsiya «Vprovadzhennya innovatsiynykh materialiv i tekhnolohiy v ramkakh prohramy «Velyke budivnytstvo». Kyiv. NTU. 2022. S. 171-176
5. Semenyuk N.P., Trach V.M., Podvorniy A.V. Stress-strainstate of a thick-walled anisotropic cylindrical shell. Int. Appl. Mech. 2023. Vol. 59, № 1, P. 79-89.
6. Лехницький С.Г. Теория упругости анізотропного тела. 2-е изд., испр. и доп. М.: Наука, 1977. 415 с.  
Lekhnikitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. 2-ye izd., ispr. i dop. M.: Nauka, 1977. 415 s.
7. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 374 с.  
Novozhilov V.V. Teoriya uprugosti. L.: Sudpromgiz, 1958. 374 s.
8. Podvorniy A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement. Int. Appl. Mech. 2017. Vol. 53, N 6, P. 623 – 638.