

# ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРОЕКТУВАННЯ ТА ЗАПРОВАДЖЕННЯ РЕСУРСОЕКОНОМНИХ КОНСТРУКЦІЙ, БУДІВЕЛЬ ТА СПОРУД

УДК 624.012.45

## ДО ПИТАННЯ СКІНЧЕНО-ЕЛЕМЕНТОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ РОЗРАХУНКУ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ПЛИТ

## FINITE ELEMENT MODELING IN THE CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE SLABS

**Азізов Т.Н., д.т.н., проф. Oricid [0000-0001-9621-9805]** (Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини), **Ковров А.В., к.т.н, проф., Oricid [0000-0001-9408-3246]** (Одеська державна академія будівництва та архітектури), **Перейрас Р., аспірант, Oricid [0000-0001-7845-3382]**<sup>1</sup> (Одеська державна академія будівництва та архітектури)

**Taliat Azizov, Doctor of Eng., Prof.** (Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University, Ukraine), **Anatolii Kovrov, Prof** (Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ukraine), **Rolando Pereiras, graduate student,** (Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Ukraine)

У статті показано, що використання скінчених елементів тонкої плити призводить до заниженого значення поперечної сили при проектуванні залізобетонних перекриттів. Показано межі використання скінчених елементів тонкої плити, товстої плити та стрижневої апроксимації. Наведено порівняння розрахунків із застосуванням різного типу моделювання роботи суцільних плит. Надано рекомендації до моделювання в різних випадках проектування залізобетонних плит.

The vast majority of reinforced concrete floor slabs fall into the category of thin slabs. But when modeling slabs with flat finite elements of a thin slab, the transverse forces are determined with errors. The sum of shear forces in plane finite elements is not equal to the value of the actual shear force near the supports and concentrated forces. To satisfy the equilibrium conditions, it is necessary to use reactions at the nodes of flat elements. But the designer uses the data on the values of transverse forces to select reinforcement and does not consider the reactions at the joints of the finite elements.

To more correctly determine the shear forces at supports and concentrated forces, elements of a thick slab can be used. To do this, however, the finite element mesh should be significantly refined.

Using the rod approximation allows you to correctly determine shear forces, especially near supports. It is shown that when using the rod approximation,

the displacements and forces coincide with the real ones with very high accuracy. When calculating specifically thick slabs (really belonging to the thick category), the rod approximation can also be used. The bending rigidity of the approximating rods in this case should be taken in the same way as for thin slabs, and their torsional rigidity can always be selected depending on the ratio of the mesh size to the span of the slab and the methods of its support.

The accuracy of determining displacements when modeling with finite elements of a thin slab does not depend much on the finite element mesh, which cannot be said about modeling with elements of a thick slab. However, shear forces when using thin elements are determined with errors. This fact is verified using volumetric finite elements.

During design, if the magnitude of the transverse force is determined incorrectly, then a situation is possible when transverse reinforcement should be assigned, but due to an error it will not be assigned at all.

It is also shown that with the rod approximation, calculations taking into account cracking can be performed without condensing the finite element mesh. In this case, it is possible to reduce the stiffness not of the entire element between global nodes, but only of its part without increasing the number of unknowns in the system of equations.

**Ключові слова:** скінчені елементи, товста пластина, тонка пластина, стрижнева апроксимація, поперечна сила, залізобетонне перекриття.  
finite elements, thick plate, thin plate, rod approximation, shear force, reinforced concrete floor

**Аналіз досліджень і постановка задачі.** Відомо, що перерозподіл зусиль у перекритті суттєво залежить і від згинальної, і від крутильної жорсткості окремих елементів [3, 4, 6]. У цих та інших роботах показано важливість правильного визначення крутильної жорсткості залізобетонних елементів із тріщинами. Відомо, що жорсткість залізобетонного елемента залежить не лише від параметрів бетону та армування, а й від рівня зусиль. У вищезгаданих роботах розглядалося питання визначення жорсткості за заданого рівня зусиль. Однак, зусилля в елементах перекриття залежить від правильного моделювання. Зазвичай роботу плити моделюють плоскими скінченими елементами [9, 10]. При моделюванні плит плоскими скінченими елементами поперечні сили визначаються з помилками. Причина полягає в тому, що дотичні сили в вертикальному напрямку по товщині плити від кручення не враховуються [5, 7, 8]. Це, в свою чергу, веде до помилок визначення головних моментів і помилок щодо переміщень.

Для уточнення значень поперечної сили можна використовувати скінчені елементи товстої плити [5]. Однак, як показують попередні розрахунки авторів цієї статті, для цього доводиться використовувати дуже густу сітку скінчених елементів, що при вирішенні завдань з великою кількістю різних

скінчених елементів ускладнює і сам розрахунок, і його аналіз.

Використання стрижневої апроксимації дозволяє правильно визначати поперечні сили, проте на сьогодні не з'ясовано вплив сітки розбиття на точність розрахунку. Не ясним залишається питання переваги та недоліків використання стрижневої апроксимації або скінчених елементів товстої плити. Крім того, хоча показана еквівалентність прогинів у плиті та в перехресно-стрижневій системі, але не з'ясовано, на скільки збігаються або відрізняються згинальні та крутні моменти в порівнюваних системах і які існують межі застосування тієї чи іншої розрахункової схеми.

У зв'язку з вищесказаною метою цієї статті є визначення меж використання скінчених елементів товстої плити, тонкої плити та стрижневої апроксимації при розрахунку залізобетонних плит, а також пропозиції до вибору моделі для правильного визначення поперечних сил та більш правильної зміни жорсткісних параметрів скінчених елементів з урахуванням тріщиноутворення при проектуванні залізобетонних перекриттів.

**Викладення основного матеріалу.** Відомо, що якщо  $h/L < 1/10$  (де  $h$ ,  $L$  – відповідно товщина і найменший розмір плити у плані), то плиту можна розраховувати за теорією тонких плит [5, 7, 8, 10]. Відомо також, що переміщення в товстій плиті відрізняються від переміщень в тонкій плиті з поправкою на величину  $(h/L)^2$  де  $h$  – товщина плити,  $L$  – її найменший розмір у плані. У зв'язку з цим практично всі реальні плити, що використовуються як перекриття в будівлях і спорудах із залізобетонним каркасом, можуть бути розраховані за теорією тонких плит. Дійсно, якщо взяти, наприклад, плиту перекриття розміром у плані 6х6 метрів із поширеною товщиною 200 мм, то відношення  $(h/L)^2 = 0.0011$ .

У той же час, враховуючи проблеми правильності визначення поперечних сил під час моделювання перекриття елементами тонкої плити [3], можна використовувати елементи товстої плити. Для цього, однак, слід розглянути питання про правильний вибір сітки скінчених елементів, щоб уникнути помилок визначення переміщень та зусиль.

Розглянемо плиту, оперту по контуру і навантажену рівномірно розподіленим навантаженням. Змоделюємо роботу плити у двох варіантах – скінченими елементами тонкої та товстої плити (у програмі LIRA-SAPR – це відповідно елемент №41 та елемент №45). Спочатку приймемо розбивку в плані (в обох варіантах) 30х30 елементів, чого цілком достатньо для отримання достатньої точності. Порівняємо переміщення у трьох характерних точках (точках 1, 2 та 3), як показано на рис. 1.

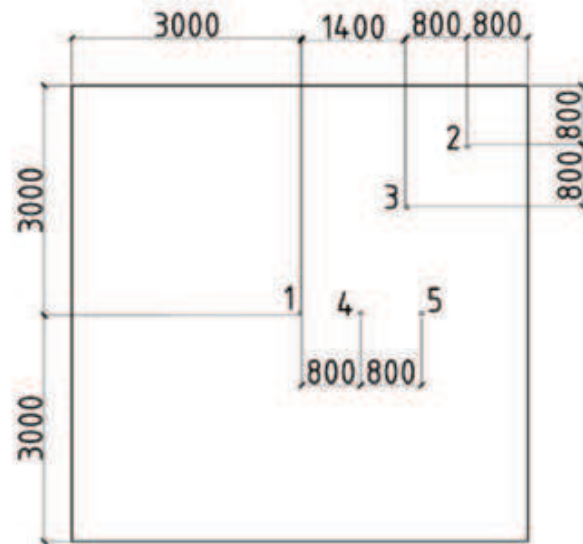


Рис. 1. Схема вузлів, у яких порівнюються переміщення при моделюванні елементами тонкої та товстої плити

Потім змодельюємо цю плиту з розбивкою в плані 60х60 елементів і порівняємо переміщення в тих же характерних точках. У таблиці 1 наведено дані розрахунків. З даних таблиці 1 можна бачити, що з сіткою скінчених елементів 60х60 переміщення при моделюванні тонкими і товстими елементами практично збігаються. А при сітці 30х30 елементів дані суттєво відрізняються. У той же час розрахунок при використанні скінчених елементів тонкої плити при розбиванні як 30х30, так і при розбиванні 60х60 елементів показує практично однакові результати. Це видно при порівнянні даних графі 2 та графі 5 таблиці 1. А порівняння даних графі 3 та графі 6 при моделюванні товстими скінченими елементами говорить про суттєву різницю.

Таким чином, можна констатувати, що точність розрахунку при моделюванні скінченими елементами тонкої плити не залежить від сітки скінчених елементів, чого не можна сказати про моделювання елементами товстої плити. Вищезгаданий факт було перевірено авторами цієї статті з використанням об'ємних скінчених елементів із досить дрібною сіткою як у плані, так і за висотою перерізу плити.

З одного боку, цей факт свідчить про можливість застосування скінчених елементів тонкої плити. З іншого боку, моделювання скінченими елементами тонкої плити призводить до значних похибок визначення поперечних сил, тобто. для правильного визначення поперечних сил слід застосовувати скінчені елементи товстої плити, проте при цьому доводиться суттєво згущувати сітку скінчених елементів (див. табл. 1). Компромісом у такому випадку може бути застосування стрижневої апроксимації для моделювання роботи плити.

Змодельюємо ту саму плиту 6х6 метрів завтовшки 20 см у вигляді перехресно-стрижневої системи. Ширину перерізу стрижнів так само як і в прикладі вище приймемо рівним 20 см (30 кроків у кожному напрямку).

Крутильну жорсткість апроксимуючих стрижнів слід прийняти рівною їх згинальній жорсткості з тією відмінністю, що модуль пружності стрижнів  $E_{st}$  повинен бути прийнятий рівним  $E_{st} = E_{pl} / (1 - \mu^2)$ , де  $E_{pl}$ ,  $\mu$  – модуль пружності матеріалу плити і коефіцієнт Пуассона. Для еквівалентності роботи суцільної плити і перехресно-балкової системи крутильну жорсткість стрижнів слід взяти рівною їх згинальній жорсткості.

У таблиці 2 наведено порівняння прогинів та зусиль при моделюванні плити скінченими елементами тонкої плити та перехресно-стрижневою системою. При цьому навантаження прикладено у вигляді зосереджених сил, розташованих у вузлах сітки скінчених елементів. Жорсткість крайніх стрижнів (по периметру плити) прийнята рівною половині жорсткості решти всіх стрижнів, що пов'язано з фактом, що на крайні стрижні припадає половина всіх навантажень.

У таблиці 2 згинальні моменти  $M_x$  і  $M_y$ , крутні моменти  $M_{xy}$  в стрижневій системі визначалися за формулами:

$$M_x = M_{x,b} + \mu \cdot M_{y,b}; \quad M_y = M_{y,b} + \mu \cdot M_{x,b}; \quad M_{xy} = (1 - \mu)M_{xy,b} \quad (1)$$

де  $M_{x,b}$  і  $M_{y,b}$  – згинальні моменти в стрижнях, що перетинаються в заданій точці;  $M_{xy,b}$  – крутний момент у стрижнях у точці, що розглядається. Балочні моменти  $M_{x,b}$ ,  $M_{y,b}$ ,  $M_{xy,b}$  визначалися як середньоарифметичне значення моментів, що примикають до вузла (рис. 2):

$$M_{x,b} = \frac{M_l + M_r}{2}; \quad M_{y,b} = \frac{M_t + M_b}{2}; \quad M_{xy,b} = \frac{M_{t,l} + M_{t,r} + M_{t,t} + M_{t,b}}{4} \quad (2)$$

де індекси при зусиллях означають:  $l$  – зліва;  $r$  – з права;  $t$  – зверху;  $b$  – знизу. Перший індекс  $t$  (torsion) в останньому виразі (2) для  $M_{xy,b}$  означає, що момент крутний.

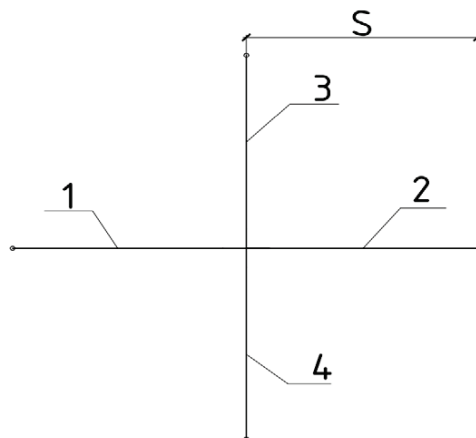


Рис. 2. Схема до визначення моментів у розглянутому вузлі перетину стрижнів: 1-  $M_l$ ,  $M_{t,l}$ ; 2-  $M_r$ ,  $M_{t,r}$ ; 3-  $M_b$ ,  $M_{t,b}$ ; 4-  $M_b$ ,  $M_{t,b}$

Аналогічна картина спостерігається для плит, прямокутних у плані. У таблиці 3 показано порівняння прогинів у п'яти характерних точках для плит розміром у плані 6x6, 6x9 та 6x12 метрів.



Дані таблиць 2 і 3 говорять про практично повний збіг переміщень і зусиль, визначених при моделюванні плоскими скінченими елементами і у вигляді перехресно-стрижневої системи.

При розгляді плити, защемленої по контуру, результати розрахунку з використанням плоских скінчених елементів і при стрижневій апроксимації збігаються зі стовідсотковою точністю.

Слід зазначити, що при розрахунку саме товстих плит (які дійсно належать до категорії товстих) також можна застосовувати стрижневу апроксимацію. Числові дослідження авторів статті показали, що згинальну жорсткість апроксимуючих стрижнів у цьому випадку слід приймати так само, як і для тонких плит, а крутильну їх жорсткість завжди можна підібрати залежно від відношення розмірів сітки до прольоту плити та способів її спирання.

Переваги моделювання роботи плити у вигляді перехресно-стрижневої системи полягають у значно точнішому визначенні поперечних сил, особливо поблизу опор. Для доказу цього факту розглянемо перекриття у плані 6х6 метрів, оперте на колони по кутах (поширена схема перекриття у будинках із монолітним залізобетонним каркасом). Така схема обрана у зв'язку з тим, що ми можемо точно знати значення поперечної сили на опорі, що дорівнює зусиллю в колоні. Розіб'ємо плиту в плані 30х30 ділянок (розміри кожного плоского елемента та ширина стрижнів у перехресно-стрижневій системі 20х20 см) і прикладемо в кожному вузлу зосереджене навантаження 375 Н (еквівалент рівномірного навантаження  $10 \text{ кН/м}^2$ ). Тоді зусилля у кожній із колон становитиме 89,72 кН. Розрахунок у програмі LIRA-SAPR показує, що поперечна сила у стрижневій системі повністю збігається з реальною. Тобто. сума поперечних сил у стрижнях по осі X і осі Y, прилеглих до вузла спирання на колону дорівнює рівно 89,72 кН. А сума поперечних сил  $Q_x+Q_y$  у кутовому скінченому елементі тонкої плити становить 16,2 кН, що більш ніж у 5 разів менше за реальну поперечну силу. При моделюванні елементом товстої плити сумарна поперечна сила  $Q_x+Q_y$  виявляється рівною 128,44 кН, що значно більше за реальну поперечну силу.

При дробленні сітки скінчених елементів до розміру 5х5 см сумарна поперечна сила плоских скінчених елементів становить: для тонких елементів – 4,86 кН; для товстих – 136,74 кН.

Таким чином, ні моделювання тонкими скінченими елементами, ні моделювання товстими скінченими елементами не дає правильного значення поперечної сили на опорах перекриття.

У цьому сенсі моделювання роботи плити перекриття у вигляді перехресно-стрижневої системи має незаперечну перевагу. Слід зазначити, що для перекриття, опертого по кутах прогини при моделюванні у вигляді перехресно-стрижневої системи мають більший розкид, ніж для перекриття, опертого по контуру (близько 3% для прогинів у середині прольоту і до 5,5% на краю плити). . Ця похибка менш суттєва проти значно більшої точності

визначення поперечних сил.

Тут слід зробити важливе зауваження. Не співпадіння суми поперечних сил в плоских скінчених елементах зусиллю в колоні означає, що для виконання умов рівноваги доводиться використовувати зусилля у вузлах стиковки плоских скінчених елементів, тобто треба роздруковувати реакції у вузлах. З врахуванням реакцій у вузлах та поперечних сил в плоских скінчених елементах умови рівноваги виконуються. Але проектувальник для підбору армування, в тому числі поперечного, користується даними значень поперечних сил, і не розглядає реакції у вузлах стиковки скінчених елементів. Тому факт не правильного визначення поперечних сил в плоских скінчених елементах є проблемою при реальному проектуванні.

При проектуванні, зазвичай, біля колон вводять або жорсткі стрижневі елементи розміром в поперечний переріз колони, або абсолютно жорсткі елементи. При цьому величина помилки в визначенні поперечних сил біля опор зменшується, але проблема все одно залишається. Крім того, така ж картина помилок в визначенні поперечних сил залишається в схемах, де прикладені зосереджені навантаження.

Крім опорних частин плити проблема визначення поперечних сил виникає під час проектування плити з отворами (рис. 3).

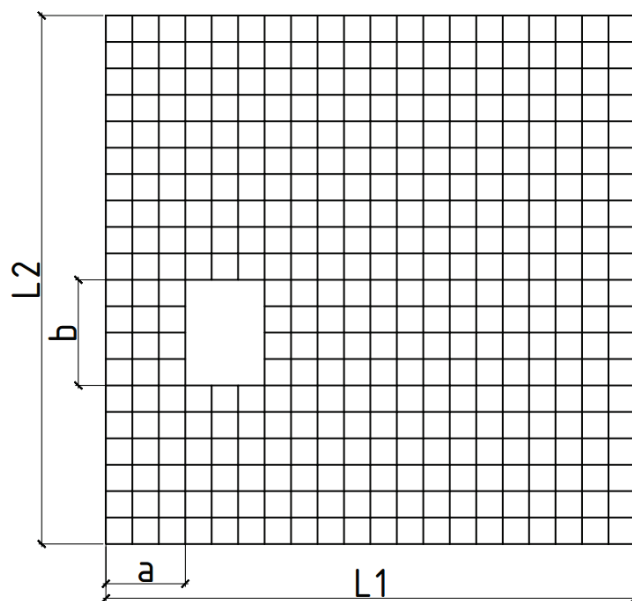


Рис. 3. Схема плити з отвором

При моделюванні ділянок плити біля отвору (ділянка a-b на рис. 3) скінченими елементами тонкої плити також призводить до суттєвого спотворення значень поперечних сил. Якщо ширина ділянки біля отвору невелика (наприклад, як на рис. 3, де по ширині розташовані лише три скінчених елемента), то моделювати її за допомогою стрижневої апроксимації не варто, тому що еквівалентність стрижневої системи із суцільною плитою проглядається при досить великій кількості кроків апроксимуючих стрижнів. У такому разі рекомендується такі ділянки

моделювати скінченими елементами товстої плити, щоб отримати адекватні значення поперечних сил. При досить великій ширині ділянки біля отворів (розмір  $a$  на рис. 3), коли можна розмістити 10 і більше кроків скінчених елементів, можна використовувати стрижневу апроксимацію.

Важливість правильного визначення поперечних сил полягає у підборі поперечного армування. Відомо [1, 2, 6], що необхідність поперечного армування перевіряється умовою, щоб поперечна сила в перерізі була менша за несучу здатність перерізу без поперечної арматури. Тому, якщо величина поперечної сили буде визначена неправильно, то можлива ситуація, коли поперечну арматуру слід було б призначити, але через помилку вона не буде призначена взагалі, бо моделювання скінченими елементами тонкої плити дає значення поперечної сили, у разі менше реальної (див. вище).

Розглянемо тепер інший важливий аспект проектування залізобетонних перекриттів. При утворенні тріщин слід зменшити жорсткість ділянки, де з'явилася тріщина. У разі використання плоских скінчених елементів доведеться зменшити жорсткість всього скінченого елемента. На рис. 4,а показана ділянка плити, що складається з чотирьох плоских скінчених елементів з сіткою розбивки  $l^1 \times l_2$  з центрами в точках  $s_1, s_2, s_3, s_4$ .

Припустимо, що в елементі  $abde$  з центром у точці  $s_1$  діє момент, що дорівнює або перевищує момент утворення тріщин. Тоді жорсткість всього елемента  $abde$  із площею  $l_1 \times l_2$  слід зменшити. При широкій сітці скінчених елементів (наприклад, 50x50 см) це буде ділянка плити з досить великою площею, і її жорсткість слід зменшити, хоча реальна довжина ділянки з тріщиною може бути значно меншою.

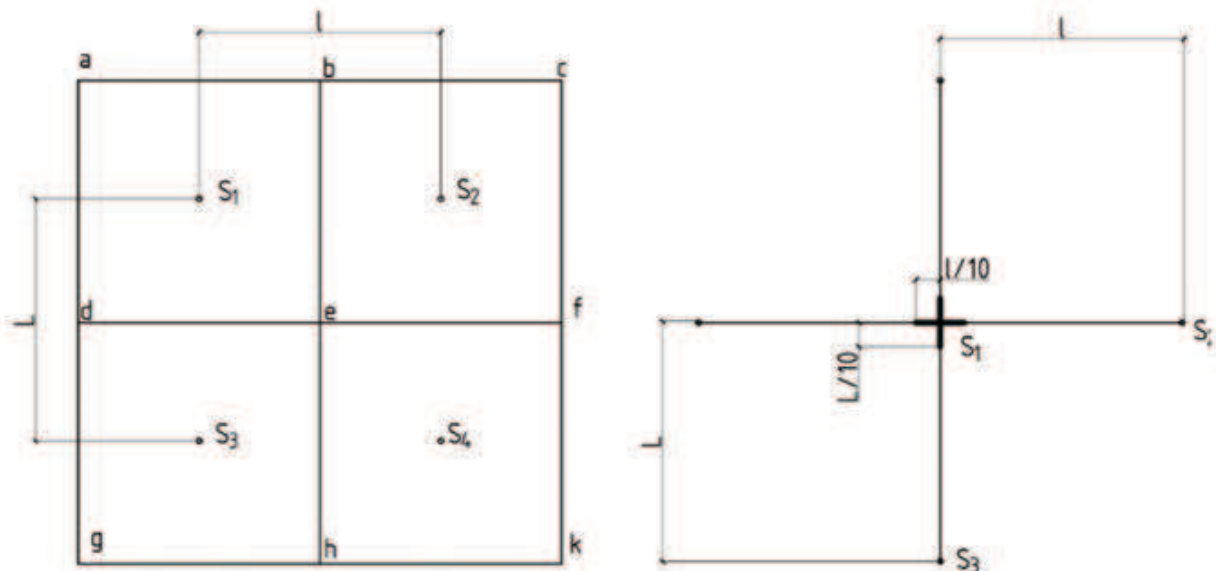


Рис. 4. Схема до врахування утворення тріщин

З одного боку, для визначення прогинів, згинальних та крутних моментів з достатньою точністю не потрібно приймати дрібну сітку скінчених



елементів. З іншого боку, жорсткість бажано зменшити лише у малій зоні, для чого довелося б дробити сітку плоских скінчених елементів.

На рис. 4,b показана ділянка плити з такою самою сіткою розбивки  $l_1 * l_2$ , але при моделюванні у вигляді стрижневої апроксимації. Переміщення та зусилля в точках  $s_1, s_2$  практично збігаються з переміщеннями та зусиллями в системі із плоских скінчених елементів (див. вище). Але довжину стрижня  $s_1 - s_2$  у стрижневій системі можна розбити на скільки завгодно ділянок без збільшення кількості невідомих у системі рівнянь. А в проміжних точках між  $s_1$  та  $s_2$  зусилля будуть визначатися залежно від зусиль у точках  $s_1$  та  $s_2$ .

Нехай, наприклад, між точками  $s_1$  та  $s_2$  стрижень розбитий на десять ділянок (при цьому наголошуємо, що кількість невідомих у системі рівнянь не змінюється). Тоді, якщо на сусідніх ділянках, прилеглих до точки  $s_1$ , момент менший за момент тріщиноутворення, то жорсткість тільки ділянки довжиною  $l_1/10$  ми можемо зменшити (на рис. 4,b ця частина позначена жирною лінією), а інші ділянки залишити без зміни. Якщо і на сусідній з цією ділянкою момент виявиться більшим за момент тріщиноутворення, то і на цій ділянці можна зменшити жорсткість. При цьому можна чітко простежити поширення тріщини. А при моделюванні плоскими скінченими елементами з цією ж метою нам довелося б суттєво згустити сітку скінчених елементів, значно збільшуючи при цьому кількість невідомих в системі рівнянь. У цьому полягає ще одна перевага використання стрижневої апроксимації при розрахунку залізобетонних плит.

### **Висновки та перспективи досліджень.**

При проектуванні залізобетонних плит зазвичай застосовують скінчені елементи тонкої плити. При цьому у опор і в місцях дії зосереджених сил значення поперечних сил виявляються заниженими. Це призводить до неправильного підбору поперечної арматури та неправильного розрахунку міцності на поперечну силу. У статті показано, що використання скінчених елементів товстої плити дозволяє точніше визначати величину поперечної сили. Однак, при цьому слід мати на увазі, що сітка скінчених елементів у такому випадку має бути суттєво згущена в порівнянні з сіткою при використанні скінчених елементів тонкої плити.

Одним із виходів з цього положення є використання стрижневої апроксимації, коли суцільна плита замінюється системою балок, розташованих у взаємно перпендикулярному напрямку. Для еквівалентності з роботою суцільної плити крутильна жорсткість апроксимуючих стрижнів приймається рівною їхній згинальній жорсткості.

Таблиця 1. Порівняння переміщень при розрахунку скінченими елементами тонкої та товстої плити

№ вузла за рис. 1	Поділ в плані 30x30 елементів			Поділ в плані 60x60 елементів		
	Тонкі елементи $f_{tn}$ (мм)	Товсті елементи $f_{tck}$ (мм)	Відношення $f_{tn}/f_{tck}$	Тонкі елементи $f_{tn}$ (мм)	Товсті елементи $f_{tck}$ (мм)	Відношення $f_{tn}/f_{tck}$
1	3.04	2.257	1.347	3.033	3.011	1.007
2	1.595	1.179	1.353	1.592	1.586	1.004
3	2.1987	1.6282	1.35	2.1939	2.182	1.005

Таблиця 2. Порівняння прогинів та зусиль при розрахунку плити скінченими елементами тонкої плити (plate) та у вигляді перехресно-стрижневої системи (beam)

№ вузла	Прогин (мм)		Згинальний момент $M_x$ (кН*см)		Згинальний момент $M_y$ (кН*см)		Крутний момент $M_{xy}$ (кН*см)			
	plate	beam	plate	beam	plate	beam	plate	beam		
1	3.258	3.288	1.01	17.04	17.04	17.25	1.012	0	0	1
2	0.594	0.602	1.013	4.58	4.76	4.76	1.04	10.76	10.86	1.01
3	1.877	1.896	1.01	11.23	11.43	11.43	1.018	5.22	5.26	1.01

Таблиця 3. Порівняння прогинів у характерних точках для плит розміром у плані 6x6, 6x9 та 6x12 м при використанні скінчених елементів плити (plate) та стрижнів (beam)

№ вузла	Плита 6x6 м			Плита 6x9 м			Плита 6x12 м		
	plate	beam	Beam_plate	plate	beam	Beam_plate	plate	beam	Beam_plate
1	3.258	3.288	1.01	6.192	6.232	1.01	8.123	8.157	1.004
2	0.594	0.602	1.013	1.208	1.221	1.01	1.313	1.324	1.01
3	1.877	1.897	1.01	3.684	3.713	1.01	4.075	4.101	1.01
4	2.997	3.025	1.01	5.394	5.43	1.01	7.067	7.097	1.004
5	2.236	2.258	1.01	3.159	3.182	1.01	4.125	4.144	1.004

У статті показані переваги використання стрижневої апроксимації, що полягають не тільки в правильному визначенні поперечних сил, але й у можливості суттєвого зменшення зони утворення тріщин на ділянках, де зусилля менше моменту тріщиноутворення.

**У перспективі** планується експериментальна перевірка пропозицій, наведених у статті.

**1.** ДБН В.2.6–98:2009. Конструкції будинків і споруд. Бетонні та залізобетонні конструкції. Основні положення. – К.:Мінрегіонбуд України, 2011. – 71 с.

DBN V.2.6–98:2009. Konstruktsii budynkiv i sporud. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii. Osnovni polozhennia. – К.:Minrehionbud Ukrainy, 2011. – 71 s.

**2.** ДСТУ Б В.2.6-156:2010. Бетонні та залізобетонні конструкції. Правила проектування. – Київ: Мінрегіонбуд, 2010. – 166 с.

DSTU B V.2.6-156:2010. Betonni ta zalizobetonni konstruktsii. Pravyla proektuvannia. – Kyiv: Minrehionbud, 2010. – 166 s.

**3.** Azizov T., Pereiras R. THE INFLUENCE OF TANGENTIAL TORSIONAL STRESSES ON THE STRESSED-DEFORMED STATE OF REINFORCED CONCRETE FLOORS // Science of Europe. #129 (2023) – p. 162-166.

**4.** Azizov T., Pereiras R. DETERMINATION OF BENDING AND TORQUE MOMENTS IN ORTHOTROPIC PLATE AS IN A CROSSBEAM SYSTEM).// Sciences of Europe. – 2022. – Vol 1, № 87(2022). – P. 61-63.

**5.** Bezuhov N.I. Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti. – М., 1968. – 512 с.

**6.** EN 1992: Eurocode 2: Design of concrete structures – Part 1: General rules and rules for buildings. – Brussels, 2002. – 230 p.

**7.** Timoshenko S. Theory of elasticity. London-New-York, 1934. – 451 p.

**8.** Timoshenko S., Woinowsky-Krieger. Theory of Plates and Shells. New York Toronto London, 1959. – 635 p

**9.** Veryuzhskij Yu.V., Kolchunov V.I., Barabash M.S. Kompyuternye tehnologii proektirovaniya zhelezobetonnyh konstrukcij. – Kiyiv: NAU, 2006. – 808 s.

**10.** Zienkiewicz O.C. The finite element method in engineering science. Mcgraw-Hill-London, 1971. 540 p.