

ПРОГИНИ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРЯМОКУТНОГО ПЕРЕРІЗУ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

DEFLECTIONS OF REINFORCED CONCRETE ELEMENTS OF RECTANGULAR SECTION FROM THE LOADED LOAD

Кухнюк О. М., к.т.н, доцент ORCID 0000- 0002 - 8261- 692X; Мишко С.В., аспірант ORCID 0009-0007-0194-1581; (Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне)

Kukhniuk O., candidate of technical sciences, associate professor ORCID 0000-0002-8261-692X; Myshko S., postgraduate student ORCID 0009-0007-0194-1581; (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

В даній роботі розглядається спрощений (лінійний) підхід до інтерпретації розвитку прогинів в умовах різного армування залізобетонних елементів на основі дослідження проведених експериментальних випробувань залізобетонних балок [1]. Наведено приклад розрахунку, що базується на стандартизованих методиках [5]

Prediction of deflections in practice is complicated by the mathematical description of curvilinear dependencies that depict the dynamics of processes. The work considers a simplified (linear) approach to the interpretation of the development of deflections in the conditions of different reinforcement of reinforced concrete elements based on the study of experimental tests of reinforced concrete beams [1]. The similarity of the hysteresis curves of deflections of reinforced concrete elements obtained by researchers (dependency of load - deflections) under different test conditions make it possible to implement a linearized model for simplification.

In this work, a linear approximation is proposed within the operating loads of 0.8 from the destructive one.

Setting the goal and objectives of the research:

- 1. With the help of mathematical methods [5], consider the possibility of describing the dependence "load - deflection" by linear approximations, in the areas preceding the critical loads P_w and P_u ;**
- 2. Finding the theoretical moment of crack formation**

The following linear dependencies were obtained:

For the area before the formation of cracks -

For the area after the formation of cracks -

Conclusions.

- 1. The given results and their statistical processing confirm the reliability of the given mathematical apparatus for describing the deflections of rectilinear sections taking into account the change in the stiffness of reinforced concrete elements before and after the development of cracks.**
- 2. This approach is simple and allows experimenters to analytically obtain compliance of deflections with applied loads within the limits of operational loads.**
- 3. The presented linearized model makes it possible to check the correctness of the experiment.**
- 4. The proposed possibility of analytical determination of the moment of crack formation in experimental beams.**

Ключові слова: бетон, деформація, прогин, лінеаризація, навантаження, конструкція, тріщини, балка, сталь, розрахунок
concrete, deformation, deflection, linearization, load, structure, cracks, beam, steel, calculation.

Вступ. Прогини залізобетонних елементів були предметом досліджень протягом багатьох років [1,2,4]. Основне завдання при визначенні прогину балок мав розрахунок жорсткості (I) балки, оскільки його значення змінюється по довжині прольоту від (I_g) для перерізів без тріщин до (I_{cr}) для перерізів з тріщинами.

В той же час, тенденції зміни жорсткості балок можна відслідкувати і за допомогою криволінійних залежностей «навантаження - прогин». Безпечна експлуатація таких конструкцій полягає у визначенні (прогнозуванні) граничних прогинів конструкцій, щоб забезпечити безпеку людей.

Прогнозування прогинів, на практиці, ускладнюються математичним описом криволінійних залежностей, які і зображують динаміку процесів.

В цій роботі пропонується лінійна апроксимація, в межах експлуатаційних навантажень 0,8 від руйнуючого.

Аналіз досліджень.

За основу пропонованого підходу були взяті дослідження Dr.Haider K. Ammash «Advanced model for the effective moment of inertia taking into account shear deformations effect» [1].

Як видно з рисунку 1, випробування проводились при різних перерізах, довжинах і армуванні залізобетонних балок, єдиний фактор об'єднуючий – прикладення зосередженого навантаження в середині прольоту балки. Аналіз таких різних досліджень дає змогу перевірити запропонований лінійний підхід для опису прогинів.

a)

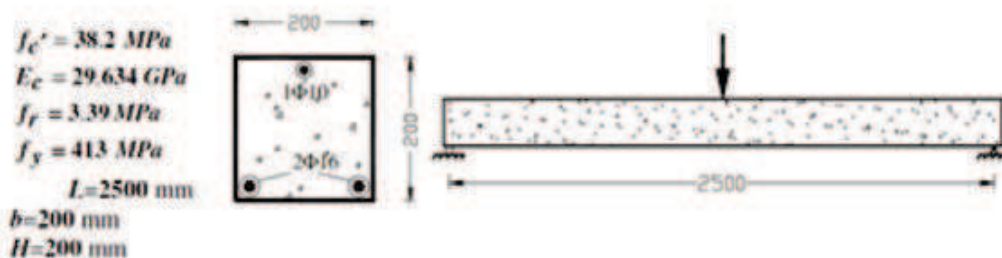


Figure (2): Details of a reinforced concrete simply supported beam under concentrated load at mid span with $(L/H=12.5)$ (Al-Zaid, et al.)

б)



Figure (6): Details of a reinforced concrete simply supported beam under concentrated load at mid span with $(L/H=6.55)$ (kreshna)

в)

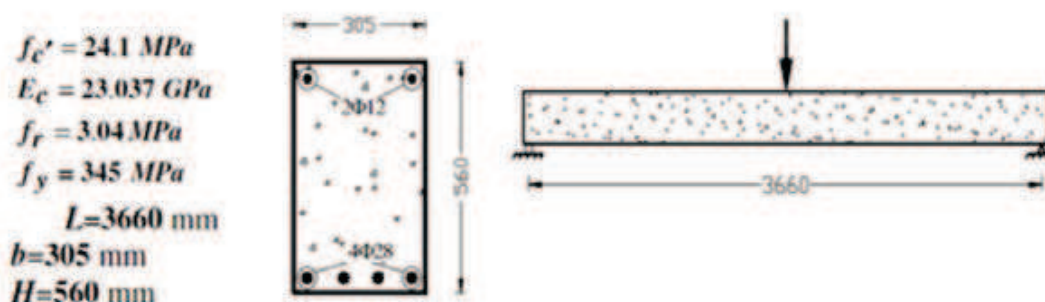


Figure (4): Details of a reinforced concrete simply supported beam under concentrated load at mid span with $(L/H=6.53)$ (Bresler and Scordelis)

Рис. 1. Схеми навантаження та характеристики випробувальних залізобетонних балок: а) $L/H=12,5$; б) $L/H=6,53$; в) $L/H=6,55$

Відповідно наведеним схемам випробувань були отримані наступні графічні результати прогинів залізобетонних елементів:

На рисунку 2 наведена типова картина, що отримана дослідниками та сучасним уявленням розвитку прогинів. Загальна картина експериментальних кривих повністю вкладається в класичний графік (рисунк 3).

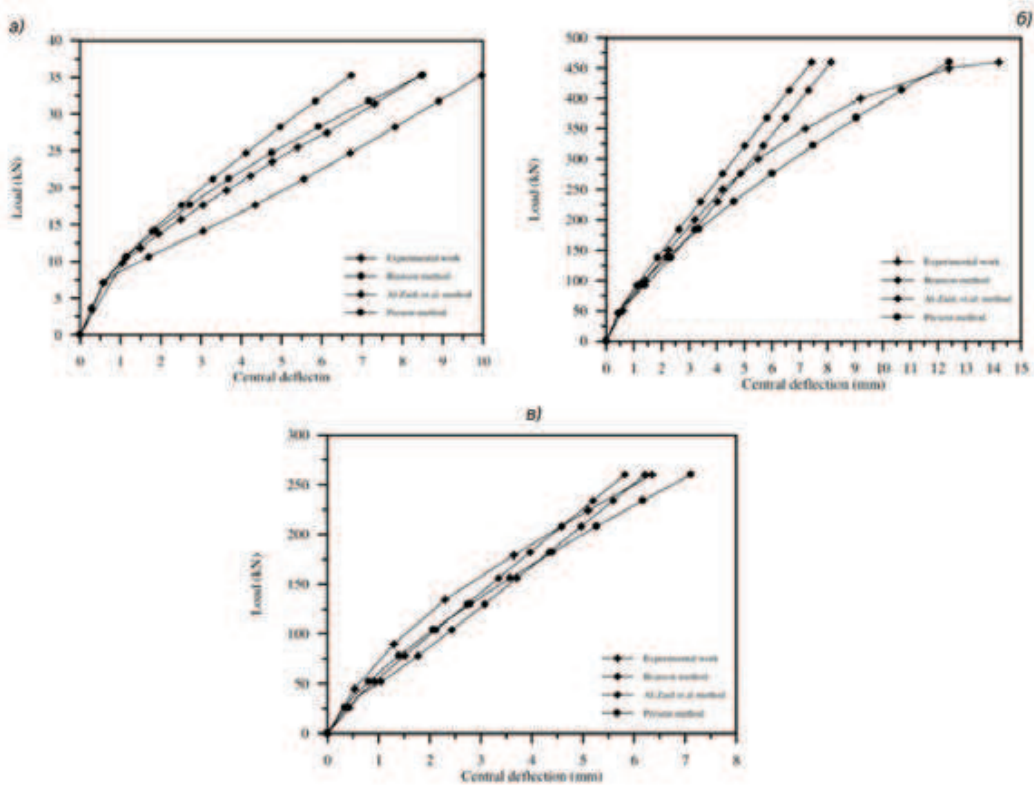


Рис. 2. Графік віднайдених авторами експериментальних та теоретичних прогинів залізобетонних балок при співвідношенні прольоту до висоти перерізу балки (L/H): а) $L/H=12,5$; б) $L/H=6,53$; в) $L/H=6,55$

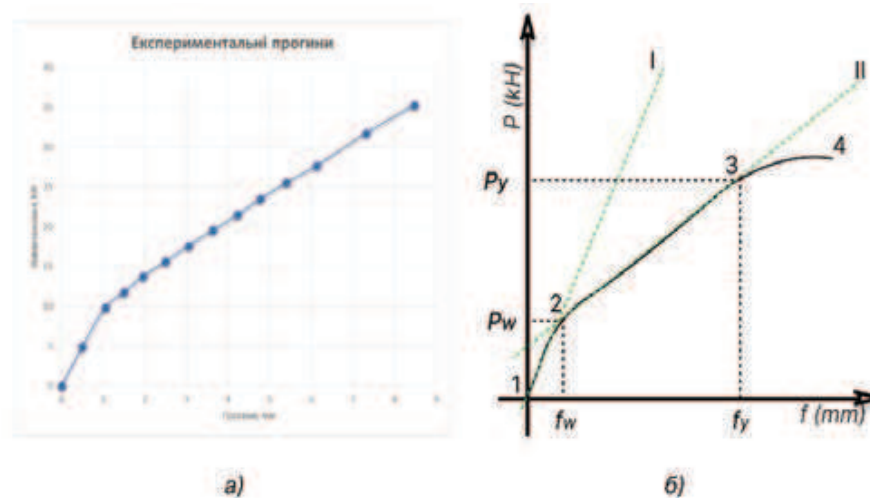


Рис. 3. Графік прогинів залізобетонних балок

а) прогини експериментальні (рис.1а), б) класична картина прогинів

Розглянемо рисунок 3 б) - точки 2 та 3 відповідають моментам інтенсивного тріщиноутворення в тілі балки (P_w та P_y) і відповідно зміні жорсткості балки.

На наш погляд, якщо розглядати експлуатаційні рівні навантаження (до 0.8 руйнуючого - P_{max}), наведену класичну картину можна спростити, де гістерезисну криву можна привести до двох прямих I та II.

Крім того, точку 2, де перетинаються дві лінії, можна з певним припущенням прийняти за момент утворення тріщин. Подібним чином точку 3 можна прийняти за P_u , а точку 4 прийняти за P_{max} .

Відповідно вище вказаним навантаженням відповідають прогини f_w , f_y і f_u рис.3.

Наведений підхід дає змогу простими рівняннями досягти достатніх, для практичного використання, результатів і його доцільно пропонувати на заміну криволінійної залежності «навантаження-прогин», яке вимагає попереднього дослідження деформацій бетону і арматури на розтяг.

В роботі [3] розглядався такий підхід при розрахункових схемах із однією зосередженою силою, прикладеною в середині прольоту, для таврових перерізів.

Постановка мети та задач досліджень:

1. За допомогою стандартизованих методик [5] розглянути можливість опису залежності «навантаження – прогин» лінійними апроксимаціями, на ділянках які передують критичним навантаженням P_w та P_u ;
2. Знаходження теоретичного моменту тріщиноутворення

Методика лінеаризації. Для отримання апроксимаційних залежностей були розглянуті результати експериментальних досліджень [1] за різних геометричних параметрів перерізів і армування балок. Схожість гістерезисних кривих прогинів (див. рис.2) залізобетонних елементів (залежність навантаження – прогини), що були отримані дослідниками, дають змогу, реалізувати для спрощення - лінеаризовану модель.

Для цього скористаємось методикою встановлення градувальних залежностей і оцінка їх похибок, наведеною в [5] та вже використаною в [3].

Рівняння залежності прогинів f - від прикладеного зусилля P запишемо у вигляді:

$$P = P_0 + k \cdot f \quad (1)$$

Початкове значення P_0 обчислюємо за формулою:

$$P_0 = \bar{P}_e - k \cdot \bar{f}_e \quad (2)$$

Коефіцієнт рівняння k знаходимо за формулою:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^N (f_{ei} - \bar{f}_e)(P_{ei} - \bar{P}_e)}{\sum_{i=1}^N (f_{ei} - \bar{f}_e)^2} \quad (3)$$

де \bar{P}_e та \bar{f}_e - середні значення експериментальних рівнів навантаження і відповідних значень прогинів розраховують за формулами :

$$\bar{P}_e = \frac{\sum_{i=1}^N P_{ei}}{N} \quad (4)$$

$$\bar{f}_e = \frac{\sum_{i=1}^N f_{ei}}{N} \quad (5)$$

де: P_{ei} та f_{ei} - відповідно експериментальні значення прикладеного зусилля та відповідних прогинів; N - число проведених досліджень, що використані для побудови залежності.

Після знаходження градуєвальної залежності проводимо коригування залежності (1) вибракуванням окремих результатів випробування, якщо останні не відповідають умові:

$$\frac{|P_{ei} - P_{ti}|}{S} \leq 2 \quad (6)$$

де S - залишкове середнє квадратичне відхилення, яке визначаємо за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (P_{ei} - P_{ti})^2}{N - 2}} \quad (7)$$

P_{ti} - значення зусилля, знайдене за формулою (1) для відповідного рівня навантаження, тобто;

$$P_{ti} = P_0 + k \cdot f_{ei} \quad (8)$$

Якщо відбулося відбракування окремих результатів, залежність встановлюють заново за формулами (1), (2), (3) за залишковими результатами.

Залежність можна вважати достовірною, якщо відносна похибка

$$\frac{S}{\bar{P}_e} < 12\% \quad (9)$$

Вирішення задачі дослідження.

За наведеною методикою встановимо прогини для балок, що випробувались за схемою (див. рис.1 в) лінійними апроксимаціями і переконаємося у справедливості спрощеного (лінійного) підходу для опису цих процесів.

Для цього розіб'ємо криву прогинів на умовні ділянки які передують критичним навантаженням P_w, P_y (див.рис.3 прямі I та II).

Перша ділянка (до утворення тріщин при P_w):

Перед обрахунком коефіцієнтів 1 ділянки, задаємо наступні умови:

1. На відміну від класичних умов [5], робимо більш жорсткими вимоги при коригуванні залежності шляхом вибракування окремих результатів (6).

$$\frac{|P_{ei} - P_{ti}|}{S} \leq 1,1 \quad (10)$$

Така умова, крім збільшення точності лінійного рівняння, дає можливість більш чітко відфільтрувати динаміку змін залежності (перехід між прямолінійними ділянками до та після утворення тріщин).

Значення величин, отриманих експериментаторами та обчислених за формулами (1-8) наведені в табл.1, а після вибраковки – в табл.2.

У результаті розрахунків отримані такі значення:

Таблиця 1

Визначення дослідних значень прогинів, що підлягають перевірці на ділянці I (рис.3б)

№ точ ки	Рівень навантаження P , кН		Перевірка умов	
	Експеримен т P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 1,1$ Формула (10)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
1	0	11,49	0,000	5,0658955%
2	50,6	46,67	0,618	
3	101,2	93,59	1,199	
4	149,5	143,43	0,956	
5	200,1	199,14	0,151	
6	250,7	257,78	1,115	

На цьому етапі отримана залежність проходить умову $5,07\% < 12\%$, проте точка 6 не проходить умову (10). Наведемо результати перерахунку після відкидання «останньої» точки (табл.2).

Визначення дослідних значень прогинів, що підлягають перевірці на ділянці II (рис.3б)

№ точки	Рівень навантаження P_p , кН		Перевірка умов	
	Експеримент P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 11$ Формула (10)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
1	0	0,00	0,000	5,872386374
2	50,6	45,47	0,871	
3	101,2	94,74	1,097	
4	149,5	147,08	0,410	
5	200,1	205,59	0,932	

При виконанні всіх умов (9) та (10) – отримуємо наступну лінійну залежність:

$$P = 61,58 \cdot f + 8,52 \quad (11)$$

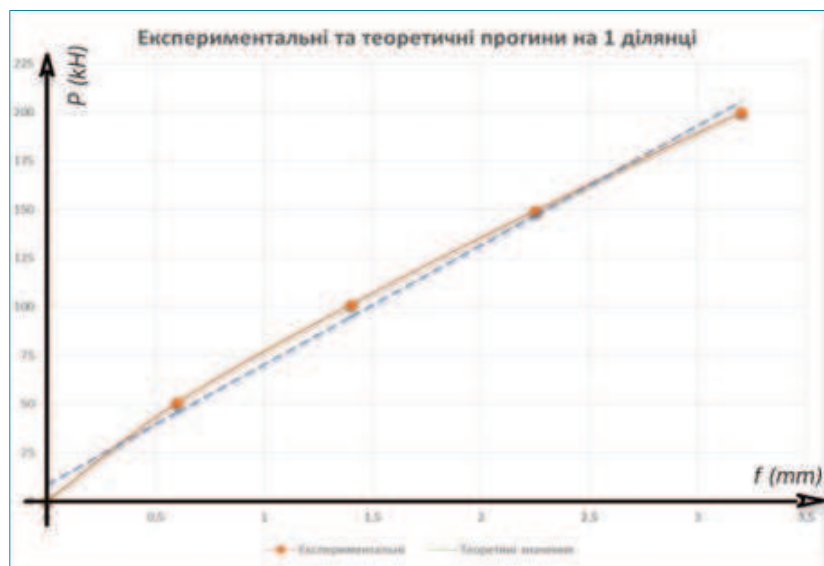


Рис.5. Графічне порівняння експериментальних та теоретичних значень прогинів (перша ділянка)

Перевірка отриманих даних проводилась методиками статистичного аналізу за допомогою програмного комплексу Statistica. Результат наведений на рис. 6

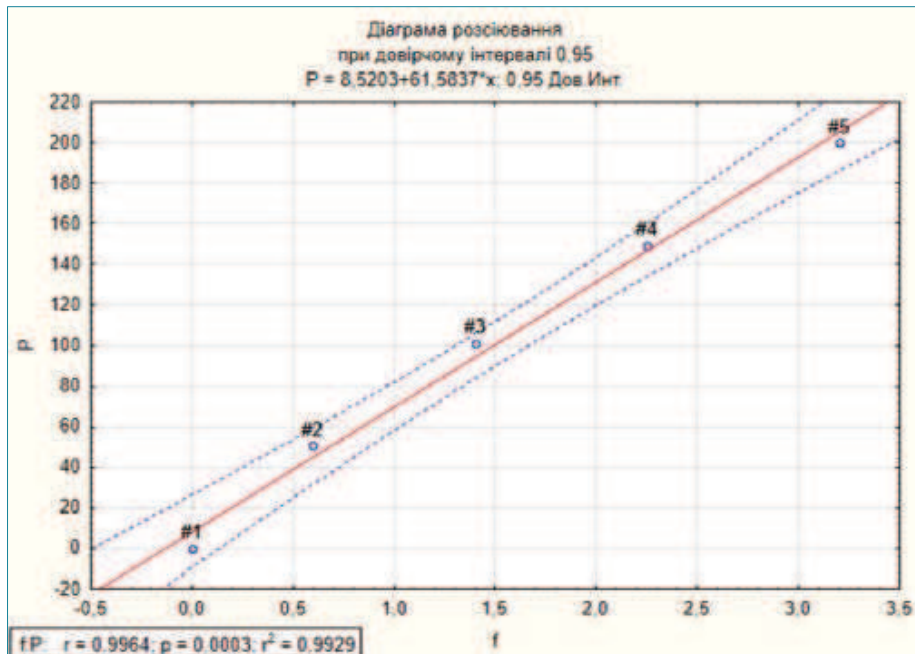


Рис.6. Діаграма розсіювання теоретичних значень при довірчому інтервалі 0,95

Звертає на себе увагу повне співпадіння отриманого нами рівняння (11) з рівнянням, отриманим за допомогою незалежного статистичного програмного комплексу.

Основні статистичні показники:

- коефіцієнт кореляції – 0,9964
- середньоквадратичне відхилення – 0,9929
- p-рівень – 0,0003.

Друга ділянка.

Застосуємо наведені підходи до прогинів, що фіксувалися після виникнення тріщин в тілі залізобетону (перевищення P_w). Аналізу підлягають точки експерименту, які були не враховані при описі I ділянки (табл. 3).

1. Перед розв'язком були задані такі умови, як і в попередньому випадку – див вираз (11).

За результатами отриманих значень ми бачимо схожу картину:

- проходження перевірки загальної залежності ($5,65\% < 12\%$)
- невиконання умови по окремим точкам (т.№9).

Таблиця 3

Порівняння дослідних та знайдених значень прогинів,
що підлягають перевірці на ділянці II (рис.3б)

№ точ ки	Рівень навантаження P_P , кН		Перевірка умов	
	Експеримен т P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 11$ Формула (10)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
6	250,7	272,7	1,059	5,647494%
7	299	299,9	0,042	
8	349,6	335,3	0,685	
9	400,2	377,1	1,111	
10	450,8	443,9	0,334	
11	460	481,4	1,030	

Проводимо подальші перерахунки шляхом послідовного відкидання останніх точок. Коригування шуканої залежності зупиняється на наступному результаті (табл.4)

Таблиця 4

Порівняння дослідних та знайдених значень прогинів,
що підлягають перевірці на ділянці II (рис.3б)

№ точ ки	Рівень навантаження P_P , кН		Перевірка умов	
	Експеримен т P_{ei}	Теоретичні P_{ti} Формула (8)	$\frac{ P_{ei} - P_{ti} }{S} \leq 11$ Формула (10)	$\frac{S}{P_e} < 12\%$ Формула (9)
1	2	3	4	5
6	250,7	255,9	0,798	2,017824%
7	299	294,5	0,690	
8	349,6	344,9	0,718	
9	400,2	404,2	0,610	
10	-	-	-	
11	-	-	-	

При виконанні умов (9) та (10) – отримуємо залежність, яка описує розвиток прогинів за лінійним законом, на ділянці II:

$$P = 13,380 f + 2965,4 \quad (12)$$



Рис.7. Графічне представлення експериментальних та теоретичних значень прогинів (II лінійна ділянка)

Аналогічно проводимо перевірку за допомогою статистичних методів (рис. 7).

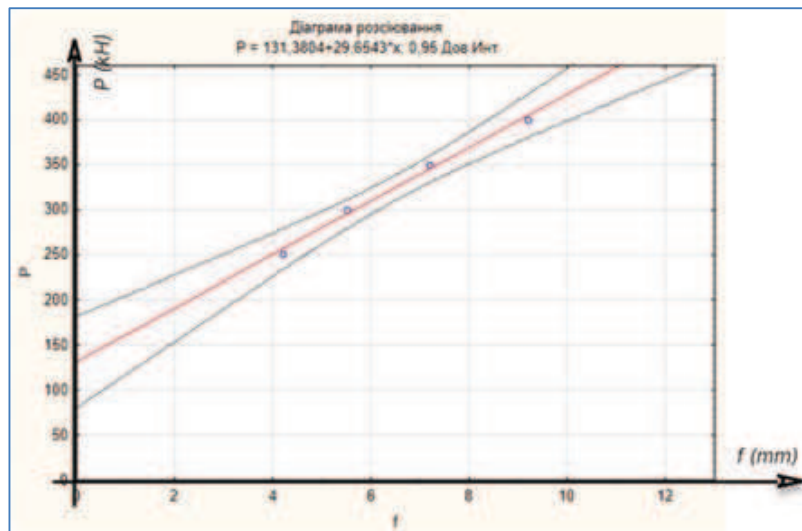


Рис.8. Діаграма розсіювання теоретичних значень при довірчому інтервалі 0,95

Основні статистичні показники віднайденної лінійної залежності:

- коефіцієнт кореляції – 0,9965
- середньоквадратичне відхилення – 0,9931
- р-рівень – 0,0035.

Розширення зони розсіювання на початку в кінці графіку опосередковано підтверджують зміну динаміки залежності, тобто на початку – до утворення тріщин, в кінці – початок пластичних деформацій в арматурі.

Друга задача дослідження – а саме знаходження теоретичного моменту тріщиноутворення, впливає із аналізу об'єднаних лінійних графіків на ділянках I та II шляхом рішення системи рівнянь:

$$\begin{cases} P = 6,158 f + 8,52 \\ P = 13,380 f + 2,965 \end{cases}$$

В результаті отримуємо критичне значення $P_w = 24,51$ кН (рис.9).

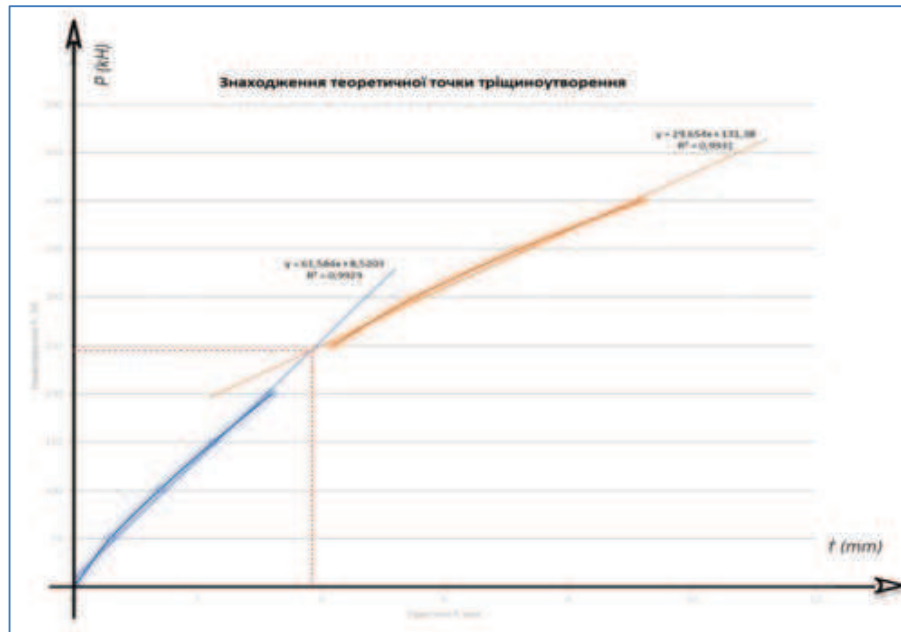


Рис.9. Знаходження теоретичної точки тріщиноутворення

Висновки. 1. Наведені результати та їх статистична обробка підтверджують надійність наведеного математичного апарату для опису прогинів прямолінійними ділянками, з врахуванням зміни жорсткості залізобетонних елементів до та після розвитку тріщин.

2. Наведений підхід простий, і в межах експлуатаційних навантажень, дозволяє експериментаторам аналітично отримувати відповідність прогинів прикладеним навантаженням.

3. Наведена лінеаризована модель дає можливість пересвідчитись у коректності проведення експерименту.

4. Запропонована можливість аналітичного знаходження моменту тріщиноутворення в дослідних балках.

1. Dr.Haider K. Ammash Muthana H. Muhaisin. Advanced model for the effective moment of inertia taking into account shear deformations effect // Al-Qadisiyah Journal for Engineering Sciences. 2009. Вип. 2. № 2. – С. 108-128.

2. Kim, S.-W. Prediction of Deflection of Reinforced Concrete Beams Considering Shear Effect / S.-W. Kim, K.-H. Kim – Text: direct // Materials. 2021. Vol. 14. № 21. – P. 6684.

3. Кухнюк, О. М. (2023) Апроксимація прогинів згинальних залізобетонних елементів під дією зосередженого навантаження. Вісник Національного університету водного господарства та природокористування (2(102)). pp. 201-213.

Kukhniuk, O. M. (2023) Aproksymatsiia prohyniv zghynalnykh zalizobetonnykh elementiv pid diieiu zoseredzhenoho navantazhennia. Visnyk Natsionalnoho universytetu vodnoho hospodarstva ta pryrodokorystuvannia (2(102)). pp. 201-213.

4. K.A. Patel et al. / Explicit expression for effective moment of inertia of RC beams Latin American Journal of Solids and Structures 12 (2015) 542-560

5. Бетони. Методи визначення міцності за контрольними зразками.: ДСТУ Б.В.2.7 - 214: 2009. - [чинний від 2009-12-22]. - К.: Мінрегіонбуд України, 2010. –43 с. – (Національний стандарт України).

Betony. Metody vyznachennia mitsnosti za kontrolnymy zrazkamy.: DSTU B.V.2.7 - 214: 2009. - [chynnyi vid 2009-12-22]. - К.: Minrehionbud Ukrainy, 2010. –43 s. – (Natsionalnyi standart Ukrainy).