

**РОЗРАХУНОК СКЛЯНИХ БАГАТОШАРОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НА ОСНОВІ КОНЦЕПЦІЇ ЕКВІВАЛЕНТНОЇ ТОВЩИНИ ТА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

**CALCULATION OF MULTI-LAYERED GLASS STRUCTURES BASED ON THE CONCEPT OF EQUIVALENT THICKNESS AND THE FINITE ELEMENT METHOD**

**Осадчук Т.Ю.**, к.т.н., в.о. доцента, ORCID ID: 0000-0002-8686-7056 (Львівський національний університет природокористування); **Фамуляк Ю.Є.**, к.т.н., доц., ORCID ID: 0000-0003-3044-5513 (Львівський національний університет природокористування); **Демчина Б.Г.**, д.т.н., проф., ORCID: 0000-0002-3498-1519 (Національний університет «Львівська політехніка»); **Безпалько В.В.**, бакалавр (Львівський національний університет природокористування)

**Osadchuk T.Yu.**, Ph.D., Assoc. prof., ORCID ID: 0000-0002-8686-7056 (Lviv National Environmental University); **Famuliak Yu.Ye.**, CSc(Eng.), Assoc. prof., ORCID ID: 0000-0003-3044-5513 (Lviv National Environmental University); **Demchyna B.G.**, DSc(Eng.), Prof., ORCID: 0000-0002-3498-1519 (Lviv Polytechnic National University); **Bezpalko V.V.**, bachelor student (Lviv National Environmental University)

Представлено особливості визначення еквівалентної товщини для багатошарових скляних конструкцій згідно з EN16612 (2019). Наведено результати нелінійного розрахунку за допомогою методу скінченних елементів, виконаного в ПК ЛІРА-САПР. Проведено аналіз напружено-деформованого стану плити, порівняння розрахункових та експериментальних значень несучої здатності та деформативності. Виконано моделювання характеру руйнування багатошарової скляної плити, що відповідає натурному експерименту.

The methodology of determining the equivalent thickness of laminated glass in accordance with EN16612 (2019) is presented. The process of selecting and calculating the requisite parameters is outlined in detail.

For a laminated glass consisting of three layers of annealed glass, 10 mm thick, bonded together with an EVASAFE polymer film, the equivalent thickness for calculating the bending deflection  $h_{ef;w}$  was calculated at a shear transmission coefficient of  $\omega=0.1$ . The equivalent thickness for calculating the stresses in the lower glass layer  $h_{ef;\sigma;l}$  was also calculated for the determined  $h_{ef;w}$  at  $\omega=0.1$ .

The numerical model of a multi-layered glass plate with an equivalent thickness according to EN 16612 (2019) was constructed using the finite element method (FEM) with the LIRA-CAD software. The supports at the corners of the plate were designed with hinges. The stiffness of the elements corresponded to the 'plate' type. The physical non-linearity (non-linear elasticity) of glass was modelled using physically non-linear finite elements of the FE-241 type and the 14-piecewise linear function of deformation (strain-stress law).

As a consequence of the non-linear calculation, the results of the fracture at each stage of loading were obtained. The crack initiation was recorded under non-linear loading, which exceeded the experimental critical load by 1.10 times. The largest calculated deflection was 2.88 times higher than the experimental deflection. The fracture pattern obtained from the non-linear FEM calculation in the LIRA-CAD software corresponded to the fracture pattern of annealed glass in multi-layered glass plates during full-scale experiments.

The non-linear behaviour of the plate was taken into account in order to develop an appropriate design scheme and model the life cycle of the structure.

**Ключові слова:** багатошарове скло, еквівалентна товщина, коефіцієнт передавання зсуву, напружено-деформований стан, нелінійний розрахунок multi-layered glass, equivalent thickness, shear transfer coefficient, stress-strain state, non-linear calculation.

**Вступ.** У зв'язку з широким застосуванням скляних несучих конструкцій у будівництві, постає питання методів їх розрахунку. Точний розрахунок напружень і прогинів багатошарового скла є складним. На сьогодні, основними методами розрахунку є: 1) аналітичний розрахунок з використанням концепції «еквівалентної товщини» згідно з EN 16612 [1], EN16613 [2] та ASTM E 1300 [3], а також моделі «ефективної товщини» Л. Галупі, Дж. Ройер-Карфаньї [4-6] та С.Дж. Беннісона [7-9]; 2) чисельне моделювання з використанням методу скінченних елементів.

Використання нелінійного розрахунку за допомогою МСЕ дозволяє провести моделювання руйнування конструкції та отримати дані для порівняння з натурними експериментами.

**Аналіз останніх досліджень.** Дослідження багатошарових скляних конструкцій представлено у роботах Т.Ю. Осадчука, Б.Г. Демчини, В.О. Гули, Л.І. Вознюка [10-13]. Метод еквівалентної товщини для розрахунку несучої здатності та деформативності багатошарового скла відповідає положенням європейських [1, 2] та американських норм [3], а також розглянутий у ряді досліджень [4-9].

**Постановка мети і задач досліджень.** *Мета* – обчислити еквівалентні товщини для побудови розрахункових схем, необхідних для визначення несучої здатності та прогинів багатошарових скляних плит. Для досягнення поставленої мети були сформульовані такі завдання: 1) провести розрахунок

еквівалентної товщини згідно з EN16612 (2019) [1] та EN16613 (2019) [2]; 2) виконати СЕ-моделювання напружено-деформованого стану плити в нелінійній постановці за допомогою ПК ЛІРА-САПР; 3) провести порівняння розрахункових та експериментальних даних.

**Концепція «еквівалентної товщини» багат шарового скла.** Для розрахунку використаємо концепцію «еквівалентної товщини» відповідно до п.п. D.2 EN 16612 (2019) [1, с.48-49]. У методі використовують окремі рівняння для граничного стану за придатністю до нормальної експлуатації (прогинів) і граничного стану за несучою здатністю (напружень).

Еквівалентну товщину для розрахунку прогину знаходять за допомогою рівняння:

$$h_{ef;w} = \sqrt[3]{\sum_k h_k^3 + 12\omega \left( \sum_i h_i h_{m,i}^2 \right)} \quad (1)$$

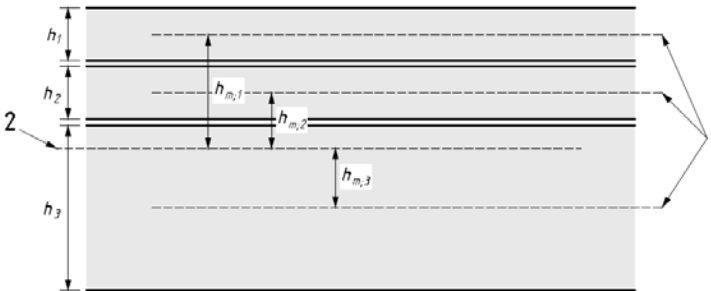
Еквівалентна товщина для розрахунку напруження в  $j$ -шарі скла:

$$h_{ef;\sigma;j} = \sqrt{\frac{h_{ef;w}^3}{h_j + 2\omega h_{m,j}}} \quad (2)$$

де  $\omega$  - коефіцієнт передавання зсуву між шарами: відсутність зсуву (0), максимальний зсув (1);

$h_k, h_j$  - товщина шару скла (рис.1);

$h_{m,k}, h_{m,j}$  - відстань від середини  $k$ -,  $j$ -шару скла до середини перерізу багат шарового скла (див. рис.1).



1 – середина окремого шару скла, 2 – середина перерізу багат шарового скла

Рис. 1. Геометричні параметри перерізу багат шарового скла (згідно з рис. D.1 EN16612 (2019) [1, с.49])

Коефіцієнт передавання зсуву між шарами  $\omega$  обирають для конкретного прошарку і визначених умов навантаження. Значення  $\omega$  в залежності від сімейства жорсткості прошарків для різних типів навантаження наведено в таблиці 1. Якщо властивості прошарку не визначені згідно з EN 16613[2], такий прошарок відносять до сімейства жорсткості 0.

Значення  $\omega$ , пов'язане з сімейством жорсткості проміжних шарів та умовами навантаження<sup>1</sup>

№	Тип навантаження	Сімейства		
		0	1	2
1	Пориви вітру (середземноморські райони)	0	0.1	0.5
2	Пориви вітру (інші райони)	0	0.3	0.7
3	Вітрові бурі (середземноморські райони)	0	0	0.1
4	Вітрові бурі (інші райони)	0	0.1	0.5
5	Навантаження на балюстраду – без скупчення людей (будівлі категорій А, В, С1 і Е)	0	0.1	0.5
6	Навантаження на балюстраду – скупчення людей	0	0.1	0.3
7	Навантаження під час обслуговування (експлуатації)	0	0	0.1
8	Снігове навантаження – зовнішні навіси та дахи неопалюваних будівель	0	0.1	0.3
9	Снігове навантаження – дахи опалюваних будівель	0	0	0.1
10	Зміни тиску в порожнині в склопакетах: літо	0	0	0.1
11	Зміни тиску в порожнині в склопакетах: зима	0	0.1	0.3
12	Постійне	0	0	0

<sup>1</sup> На основі табл. D.3 EN16612 (2019) [1, с.51]

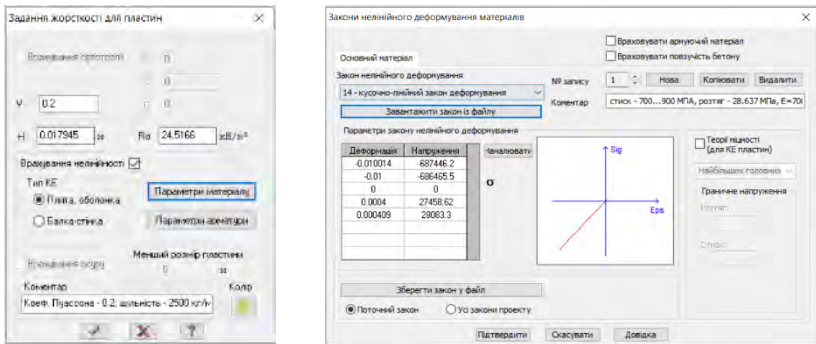
В роботі [14] на основі обчислених значень модуля пружності  $E_L$  для різних випадків навантаження було обрано сімейства жорсткості, а також відповідні значення коефіцієнта передавання зсуву  $\omega$ , що відповідають характеристикам полімерних плівок типу EVASAFE.

Для розрахунків в практичних цілях рекомендовано приймати  $\omega = 0,1$ .

Згідно з рівнянням (1) для багатошарового скла, що складається з 3 шарів звичайного скла, товщиною по 10 мм, з'єднаних між собою за допомогою полімерної плівки EVASAFE, еквівалентна товщина для розрахунку прогину при згині  $h_{ef,w}$  при коефіцієнті передавання зсуву  $\omega=0,1$  склала 17,945 мм. Відповідно до рівняння (2) еквівалентна товщина для розрахунку напружень в нижньому шарі скла становила  $h_{ef,s,1} = 21,807$  мм.

Моделювання скляної багатошарової плити з еквівалентними товщинами виконали в ПК ЛІРА-САПР. SE-моделі склалися з 324 скінченних елементів з розміром сторони 25 мм. Опирання плит по кутах прийняли шарнірного типу.

Жорсткість елементів задали як «Пластини» (рис. 2) з відповідними значеннями коефіцієнта Пуассона  $\nu$ , товщини перерізу  $H$  та питомої ваги матеріалу  $R_0$ . Вибравши опцію «Врахування нелінійності» і тип KE «Плита, оболонка», далі обрали «14-кусково-лінійний закон деформування» матеріалу.



а) б)

Рис. 2. Задання жорсткості скінченим елементам плити:  
а) параметри жорсткості; б) кусково-лінійний закон деформування

Для опису фізичної нелінійності (нелінійної пружності) з бібліотеки скінчених елементів для фізично нелінійних задач обрали SE-241 (табл. 2), а з бібліотеки законів деформування матеріалів (залежностей  $\sigma$ - $\epsilon$ ) для фізично нелінійних скінчених елементів – закон ламаної типу «деформація-напруження» (див. рис. 2, б; табл. 3).

Таблиця 2.

Скінченний елемент типу SE-241

№ SE	Найменування SE	Ознака схеми	Площина розташування	Ступені свободи
1	2	3	4	5
241	<p>Прямокутний елемент оболонки</p>	5	довільно	X, Y, Z, UX, UZ, UY

Залежність  $\sigma$ - $\varepsilon$  для фізично нелінійного СЕ

Закон ламаної типу «деформація-напруження»	Поле параметрів
	<p><math>\varepsilon_i</math> – деформація в проміжній точці;  <math>\sigma_i</math> – напруження в проміжній точці;  – характеристики вітки стиску є від’ємними числами;  – ділянки задають зліва направо (стиск – розтяг);  – кількість <math>i</math>-точок необмежена.  – горизонтальні ділянки не задають</p>

Навантаження прийняли розподіленим по центру плити на області  $100 \times 100$  мм, аналогічно до натурального експерименту. Розрахункові схеми плити з двома еквівалентними товщинами представлено на рис. 3.

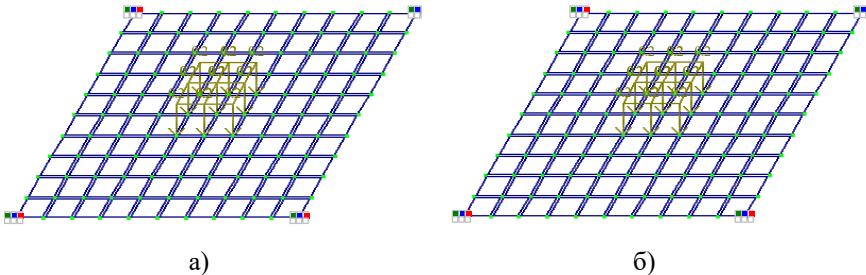


Рис. 3. Розрахункові схеми плити з еквівалентними товщинами:

а) для розрахунку прогину  $h_{ef,w}$ ; б) для розрахунку несучої здатності  $h_{ef,\sigma;1}$

Розрахунок фізично нелінійної задачі виконали за допомогою покрокового методу завантажень (рис. 4). Історію навантаження задали в один крок через відповідні значення «сумарного коефіцієнта».

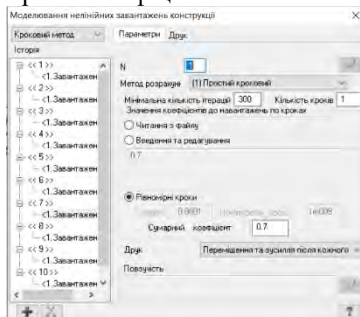


Рис. 4. Моделювання нелінійних завантажень конструкції

**Результати досліджень.** На основі проведеного в ПК ЛІРА-САПР розрахунку для кожного етапу навантаження отримали значення прогинів для розрахункової схеми з еквівалентною товщиною  $h_{ef;w}$  (рис. 5, а) та напруження в нижньому шарі скла в розрахунковій схемі з еквівалентною товщиною  $h_{ef;\sigma;1}$  (рис. 5, б).

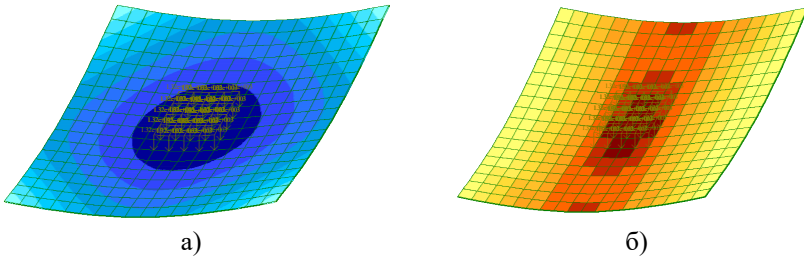


Рис. 5. Результати розрахунку:  
а) переміщення по осі  $z$ ; б) напруження по  $Mx$

Завдяки нелінійному розрахунку на кожному етапі навантаження вели контроль за руйнуванням. Навантаження, при якому зафіксували появу тріщин, становило  $F_{cr;calc} = 13,2$  кН (рис. 6). Відношення експериментально встановленого руйнівного навантаження до розрахункового складо  $F_{cr;exp} / F_{cr;calc} = 14,50$  кН /  $13,2$  кН =  $1,10$  раза.

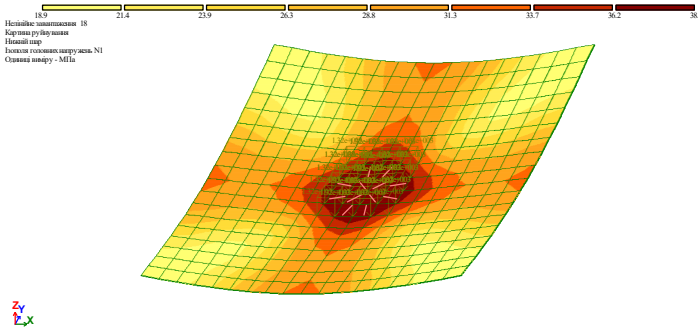
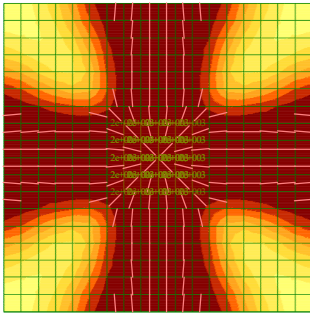


Рис. 6. Поява тріщин на ізополях головних напружень  $N1$

Найбільший розрахунковий прогин  $w_{cr;calc} = 5,25$  мм у  $2,88$  раза перевищив експериментальний прогин  $w_{cr;exp} = 1,82$  мм.

Руйнування плити згідно з нелінійним розрахунком відповідало руйнуванню звичайного скла у багат шарових плитах (рис. 7).



а)



б)

Рис. 7. Вигляд руйнування плити:  
а) згідно з розрахунком; б) під час натурального експерименту

**Висновки та рекомендації.** Перевірено методику розрахунку багатошарових скляних конструкцій на основі концепції «еквівалентної товщини» згідно з EN16612 (2019). Обчислено еквівалентну товщину для розрахунку прогину при згині  $h_{ef;w}$  та еквівалентну товщину для розрахунку напружень в нижньому шарі скла  $h_{ef;\sigma;1}$  при коефіцієнті передавання зсуву  $\omega=0.1$  згідно з EN16613 (2019).

Виконано нелінійний розрахунок багатошарової скляної плити в ПК ЛПРА-САПР для двох розрахункових схем з еквівалентними товщинами  $h_{ef;w}$  та  $h_{ef;\sigma;1}$ . Відношення розрахункових значень до експериментальних даних для несучої здатності та прогинів склали 1,10 та 2,88 рази, відповідно.

Характер руйнування, змодельований під час нелінійного розрахунку, був аналогічний до вигляду руйнування шарів звичайного скла у експериментальному зразку.

Таким чином, встановлено, що робота скляних багатошарових конструкцій підлягає відтворенню та прогнозуванню з використанням концепції «еквівалентної товщини» та методу скінчених елементів.

1. EN 16612:2019. Glass in building. Determination of the lateral load resistance of glass panes by calculation.

2. EN 16613:2019. Glass in building. Laminated glass and laminated safety glass. Determination of interlayer viscoelastic properties.

3. ASTM E1300-16. Standard Practice for Determining Load Resistance of Glass in Buildings. <https://doi.org/10.1520/E1300-16>.

4. Galuppi L., Royer-Carfagni G. Effective thickness of laminated glass beams: New expression via a variational approach. *Engineering Structures*. 2012. Vol. 38. pp. 53-67. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2011.12.039>.

5. Galuppi L., Royer-Carfagni G., The effective thickness of laminated glass plates, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*. 2012. Vol. 7. pp. 375-400. <https://doi.org/10.2140/jomms.2012.7.375>



6. Galuppi L., Royer-Carfagni G., Enhanced Effective Thickness of Multi-Layered Laminated Glass, *Composites: Part B*. 2014. Vol. 64. pp. 202–213.

7. Bennison S.J., Serruys F. Designing the Grand Canyon's new laminated glass walkway. *Glass Performance Days: Conference proceedings*, Tampere, Finland, 15 - 18 June 2007. pp. 333-335.

8. Bennison S.J., Smith C., Van Duser A., Jagota A. Strength of Laminated Safety Glass. *Glass Processing Days: Conference proceedings*, Tampere, Finland, 18-21 June 2001.

9. Bennison S.J., Smith C., Van Duser A., Jagota A. Structural performance of laminated glass made with a «stiff» interlayer. *The Use of Glass in Buildings* / ed. V. Block. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2002. pp. 57-65. <https://doi.org/10.1520/STP11056S>.

10. Осадчук Т.Ю., Демчина Б.Г. Дослідження міцності багатошарових скляних плит, які працюють на згин від зосередженого навантаження штампом. *Будівельне виробництво: міжвідомчий науково-технічний збірник*. Київ: НДІБВ, 2016. № 60. С.58–63.

Osadchuk T.Yu., Demchyna V.H. Doslidzhennia mitsnosti bahatosharovykh sklianykh plyt, yaki pratsiuuiut na zghyn vid zoseredzhenoho navantazhennia shtampom. *Budivelne vyrobnystvo: mizhvidomchyi naukovo-tekhnichnyi zbirnyk*. Kyiv: NDIBV, 2016. № 60. S.58–63.

11. Осадчук Т.Ю., Демчина Б.Г. Дослідження деформації багатошарових скляних плит за допомогою кореляції цифрових зображень. *Науково-технічний збірник «Комунальне господарство міст»*. Серія: Технічні науки та архітектура. Харків: ХНУМГ ім. О.М. Бекетова, 2017. Випуск 134. С.153–163.

Osadchuk T.Yu., Demchyna V.H. Doslidzhennia deformatsii bahatosharovykh sklianykh plyt za dopomohoiu koreliatsii tsyfrovykh zobrazhen. *Naukovo-tekhnichnyi zbirnyk «Komunalne hospodarstvo mist»*. Seria: Tekhnichni nauky ta arkhitektura. Kharkiv: KhNUMH im. O.M. Beketova, 2017. Vypusk 134. S.153–163.

12. Демчина Б., Осадчук Т. Результати експериментальних досліджень опертих по чотирьох кутах скляних плит з різними типами скла, які працюють на згин. *Вісник Львівського національного аграрного університету*. Серія: Архітектура і сільськогосподарське будівництво. Львів: ЛНАУ, 2018. № 19. С. 57–60. <https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.057>.

Demchyna B., Osadchuk T. Rezultaty eksperymentalnykh doslidzhen opertykh po chotyrokht kutakh sklianykh plyt z riznymy typaramy skla, yaki pratsiuuiut na zghyn. *Visnyk Lvivskoho natsionalnoho ahrarnoho universytetu*. Seria: Arkhitektura i silskohospodarske budivnystvo. Lviv: LNAU, 2018. № 19. S. 57–60. <https://doi.org/10.31734/architecture2018.19.057>.

13. Demchyna B., Hula V., Vozniuk L. The experimental research of flexural strength and deformation of one-layer glass slabs that work on bending. *AIP Conf. Proc.* 2949, 020010 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0165293>.

14. Осадчук Т.Ю., Фамуляк Ю.С., Регуш А.Я., Буханец Д. Визначення сімейства жорсткості проміжного шару для розрахунку ефективної товщини багатошарових скляних плит. *Ресурсоекономі матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць*. Рівне: НУВГП, 2023. Випуск 44. С.283-291. <https://doi.org/10.31713/budres.v0i44.31>

Osadchuk T.Yu., Famuliak Yu.Ye., Rehush A.Ya., Bukhaniets D. Vyznachennia simeistva zhorstkosti promizhnogo sharu dlia rozrakhunku efektyvnoi tovschchyny bahatosharovykh sklianykh plyt. *Resursoekonomni materialy, konstruktzii, budivli ta sporudy: Zbirnyk naukovykh prats*. Rivne: NUVHP, 2023. Vypusk 44. S.283-291. <https://doi.org/10.31713/budres.v0i44.31>.