

**ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ НАДІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ
ЗАЛІЗОБЕТОННИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК, ПІДСИЛЕНИХ
АНІЗОТРОПНИМ КОМПОЗИТОМ**

**ENSURING RELIABLE PARAMETERS OF FREE TROATING OF
REINFORCED CONCRETE CYLINDRICAL SHELLS REINFORCED
WITH ANISOTROPIC COMPOSITE**

Трач В.М. д.т.н., професор, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Подворний А.В.** д.т.н., доцент, ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

Trach V.M. doctor of technical sciences, professor, ORCID ID: 0000-0001-9500-2743, **Podvorni A.V.** doctor of technical sciences, associate professor. ORCID ID: 0000-0001-8518-4395, (National university of water management and nature resources use, Rivne)

В роботі, при використанні лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, виведена, в частинних похідних, тривимірна система диференціальних рівнянь руху. Проведено встановлення частот вільних коливань циліндричної залізобетонної оболонки. Розраховано, з метою надійного забезпечення параметрів вільних коливань, таку оболонку, що підсилена волокнистим композитом.

In the article, using a three-dimensional system of partial differential equations of motion of the linear theory of elasticity of an anisotropic body in a cylindrical coordinate system, a study of the frequencies of free oscillations of a cylindrical reinforced concrete shell of a tunnel structure is carried out. This system is derived using the modified Hu – Wasidzu variational principle. To reduce the three-dimensional system of differential equations to a one-dimensional one, the procedure of the Bubnov – Galerkin analytical method is used. After its use, an infinite system of ordinary differential equations is obtained that describe the free oscillations of anisotropic layered cylindrical shells in the normal Cauchy form. The solution of the obtained one-dimensional system of differential equations is carried out using the numerical method of discrete orthogonalization, which was accordingly adapted to solve the problem. A study of the frequencies of free oscillations of a reinforced concrete cylindrical circular shell of a tunnel structure is carried out. To ensure reliable parameters of free oscillations, an option of strengthening the outer surface of the shell with a fibrous composite material was considered. Calculations were made and the

results of establishing the frequencies of free vibrations of such a structure were analyzed depending on the angle of laying of the fibrous material.

Ключові слова:

циліндрична оболонка, тунельна споруда, вільні коливання, тривимірна постановка, волокнистий композит
cylindrical mandrel, tunnel structure, free oscillations, three-dimensional formulation, fiber composite.

Вступ. Аналіз останніх досліджень. Проблема захисту елементів тунельних споруд від вібрацій, викликаних рухом автомобільного або залізничного транспорту, пов'язана також із встановленням параметрів вільних коливань оболонкових тунельних конструкцій. Відомо, що співпадіння частот вимушуючих і вільних коливань часто призводить до явища резонансу та можливого руйнування конструкцій чи споруд.

Вільні коливання анізотропних композитних оболонок, якими може моделюватися тунельна споруда, недостатньо досліджено через складність побудови методів розрахунків таких конструкцій. Водночас використання сучасних композитних матеріалів призводить до необхідності вдосконалення методів розв'язання динамічних задач на основі рівнянь просторової теорії пружності.

Мета дослідження. У цій роботі представлений підхід до вирішення задачі встановлення параметрів вільних коливань циліндричних анізотропних оболонок (рис. 1) у тривимірній постановці на основі співвідношень теорії пружності анізотропного тіла, представлених у роботі [1].

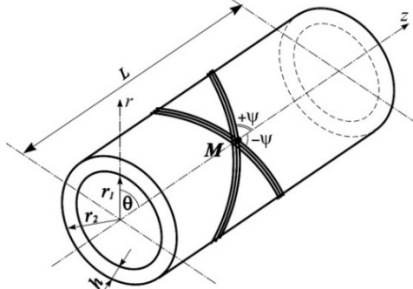


Рис. 1. Анізотропна циліндрична оболонка

Постановка задачі та методика розв'язку. Диференціальні рівняння, що описують вільні коливання, співвідношення пружності та граничні умови відповідно до варіаційного принципу Ху – Васіду [2] можливо здобути з умови стаціонарності функціоналу Π_1 , що визначається з інтегралу:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \iiint_V \left\{ W(e_{ij}) - T(u_i) + \Phi(u_i) - \sigma_{ij} \left[e_{ij} - \frac{1}{2} \times (u_{i;j} + u_{j;i}) \right] \right\} dV + \\ & + \iint_{S_1} \Psi(u_i) dS - \iint_{S_2} p_i (u_i - \bar{u}_i) dS. \end{aligned} \quad (1)$$

В (1) варіюються без використання додаткових умов деформації e_{ij} , напруження σ_{ij} та переміщення u_i , напруження p_i на поверхні S_2 викликані переміщеннями \bar{u}_i . Також в цьому функціоналі $W(e_{ij})$ – потенціальна енергія деформації, $T(u_i)$ – кінетична енергія, $\Phi(u_i)$, $\Psi(u_i)$ – потенціали об'ємних і поверхневих навантажень.

Згідно підходу представленого в [1], з умови стаціонарності варіації функціоналу (1), отримаємо тривимірну систему з шести диференціальних рівнянь, що описують частоти вільних коливань анізотропних циліндричних оболонок в частинних похідних з відповідними граничними умовами на поверхнях і торцях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial r} = & -\frac{c_{23}^i + 1}{r} \sigma_{rr}^i - \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial \theta} + \frac{c_{22}^i}{r^2} u_r^i + \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + \\ & + \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_r^i; \\ \frac{\partial \tau_{rz}^i}{\partial r} = & c_{13}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{1}{r} \tau_{rz}^i - \frac{c_{12}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{11}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{66}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \\ & - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{2c_{16}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\ & - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + \rho^i \omega^2 u_z^i; \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^i}{\partial r} = & \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial \theta} - \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^i - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} - \frac{c_{12}^i + c_{66}^i}{r} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z \partial \theta} - c_{66}^i \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z^2} - \\ & - \frac{c_{22}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial \theta^2} + c_{36}^i \frac{\partial \sigma_{rr}^i}{\partial z} - \frac{c_{26}^i}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial z} - c_{16}^i \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial z^2} - \frac{c_{26}^i}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^i}{\partial \theta^2} - \\ & - \frac{2c_{26}^i}{r} \frac{\partial^2 u_\theta^i}{\partial z \partial \theta} + \rho^i \omega^2 u_\theta^i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r^i}{\partial r} &= c_{33}^i \sigma_{rr}^i + \frac{c_{23}^i}{r} u_r^i + c_{13}^i \frac{\partial u_z^i}{\partial z} + \frac{c_{36}^i}{r} \frac{\partial u_z^i}{\partial \theta} + c_{36}^i \frac{\partial u_\theta^i}{\partial z} + \frac{c_{23}^i}{r} \frac{\partial u_\theta^i}{\partial \theta}; \\ \frac{\partial u_z^i}{\partial r} &= a_{55}^i \tau_{rz}^i + a_{45}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{\partial u_r^i}{\partial z}; \\ \frac{\partial u_\theta^i}{\partial r} &= a_{45}^i \tau_{rz}^i + a_{44}^i \tau_{r\theta}^i - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^i}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u_\theta^i. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут r – радіус циліндра, який не залежить від координат z та θ ; σ_{rr}^i , τ_{rz}^i , $\tau_{r\theta}^i$, – компоненти напружень (2); u_z^i , u_θ^i , u_r^i – переміщення для кожного i -го шару оболонки за напрямками відповідно осей z , θ , r ; ω є частотою вільних коливань; ρ^i – щільність матеріалу з якого виготовлений i -й шар конструкції. Сталі c_{kl}^i ($k, l=1, 2, 3, 6$) – це характеристики i -го шару, що визначаються за допомогою механічних констант a_{kl}^i [3] матеріалу оболонки відповідно до [4].

Для зменшення розмірності отриманої системи рівнянь скористаємось процедурою методу Бубнова – Гальоркіна [5] при розкладенні параметрів напружень та переміщень у подвійні тригонометричні ряди.

Після математичних перетворень отримаємо для кожного i -го шару оболонкової конструкції нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь в нормальній формі Коші [1]

$$\frac{d\bar{y}^i}{dr} = \left(T^i(r) - \omega^2 C^i(r) \right) \bar{y}^i, \quad T^i(r) = t_{n,l}^i(r), \quad C^i(r) = c_{n,l}^i(r), \quad (3)$$

де $\bar{y}^i = \left\{ y_{1,p}^i; y_{2,p}^i; y_{3,p}^i; y_{4,p}^i; y_{5,p}^i; y_{6,p}^i; y_{1,m}^{i/}; y_{2,m}^{i/}; y_{3,m}^{i/}; y_{4,m}^{i/}; y_{5,m}^{i/}; y_{6,m}^{i/} \right\}$ – розв'язуюча вектор-функція, $T^i(r)$ – квадратна матриця із змінними коефіцієнтами, що залежить від аргументу r , $C^i(r)$ – матриця, що характеризує інерційні властивості оболонки. Ненульові елементи матриці $T^i(r)$, коефіцієнти при невідомих системи (2) $t_{n,l}^i(r)$, без докритичних напружень, приведені в [5]. Ненульові елементи матриці $C^i(r)$ мають вигляд:

$$c_{1,4}^i = \rho, \quad c_{2,5}^i = \rho, \quad c_{3,6}^i = \rho, \quad c_{7,10}^i = \rho, \quad c_{8,11}^i = \rho, \quad c_{9,12}^i = \rho. \quad (4)$$

Система рівнянь (3) при умовах на поверхнях оболонки

$$\begin{aligned} \text{при } r = r_1 : \sigma_{rr}^0(r_1, z, \theta) = 0; \tau_{rz}^0(r_1, z, \theta) = 0; \tau_{r\theta}^0(r_1, z, \theta) = 0, \\ \text{при } r = r_2 : \sigma_{rr}^n(r_2, z, \theta) = 0; \tau_{rz}^n(r_2, z, \theta) = 0; \tau_{r\theta}^n(r_2, z, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{та на торцях} \quad \sigma_{zz} = u_r = u_\theta = 0 \quad (6)$$

розв'язується при використанні чисельного методу дискретної ортогоналізації [6].

Реалізація запропонованої методики встановлення частот вільних коливань циліндричних оболонок. Для представлення можливостей запропонованого підходу розв'яжемо задачу встановлення частот вільних коливань циліндричної залізобетонної оболонки тунельної споруди. Радіус внутрішньої бокової поверхні $r_1=4,7\text{м}$, зовнішньої – $r_2=5,3\text{м}$, а довжина елемента $L=10,0\text{м}$, рис. 1.

В якості матеріалу конструкції, що забезпечує надійні параметри вільних коливань, виберемо підсилений з зовні залізобетон шаром волокнистого композиту боропластику, головні напрямки пружності якого можуть бути повернуті на кут ψ відносно напрямку твірної оболонкової конструкції. Порівняємо параметри вільних коливань конструкції без використання боропластику та з ним. У випадку використання волокнистого композиту геометрія оболонки така: залізобетонний шар $r_{1s}=4,7\text{м}$; $r_{2s}=5,25\text{м}$, шар боропластику: $r_{1b}=5,25\text{м}$; $r_{2b}=5,3\text{м}$, довжина така ж.

Механічні характеристики матеріалів, що використано при виготовленні оболонки наступні: залізобетон – $E_{11}=3,1E_0$, $\nu_{21}=0,2$, густина 2400кг/м^3 ; боропластик – $E_{11}=280E_0$, $E_{22}=E_{33}=31E_0$, $G_{12}=G_{23}=10,5E_0$, $G_{13}=21,2E_0$, $\nu_{21}=0,25$, $\nu_{12}=0,0277$, $E_0=10000\text{МПа}$, густина 2118кг/м^3 .

Табл. 1 представляє результати встановлення частот вільних коливань розглядуваних варіантів циліндричної оболонки тунельної споруди.

Таблиця 1

Частоти вільних коливань циліндричної оболонки

Частота вільних коливань	Залізо-бетонна оболонка	Двошарова циліндрична оболонка						
		Кут повороту головних напрямів пружності шару боропластику, ψ^0						
		0	15	30	45	60	75	90
$\omega, \text{с}^{-1}$	2,75	4,48	4,77	4,95	4,70	4,40	4,02	3,85

З аналізу результатів дослідження частот вільних коливань залізобетонної оболонки тунельної споруди циліндричного профілю можливо зауважити, що підсилення її зовнішньої поверхні волокнистим композитом веде до збільшення величини розглядуваного параметру. Видно, що різниця між частотами здобутими для залізобетонної оболонки та для випадку підсилення

її боропластиком при куті його укладання $\psi=0^0$ (рис. 1) досягає 63%. Також зауважимо, що шляхом зміни кута укладання підсилюючого композиту можливо керувати частотами вільних коливань споруди. Так при куті $\psi=30^0$ мають місце найбільші значення розглядуваних частот які більші за отримані при $\psi=0^0$ на 10,4%. Зазначене дозволяє створювати оболонкові конструкції для яких можливе надійне забезпечення параметрів їх вільних коливань.

Висновки. В роботі, при використанні тривимірної системи однорідних диференціальних рівнянь руху в частинних похідних лінійної теорії пружності анізотропного тіла в циліндричній системі координат, проведено дослідження частот вільних коливань циліндричної залізобетонної оболонки тунельної споруди. При цьому було розглянуто варіант підсилення зовнішньої поверхні оправки волокнистим композитним матеріалом. Проведені розрахунки та проаналізовані результати встановлення частот вільних коливань такої конструкції в залежності від кута укладання волокнистого матеріалу.

1. Трач В. М., Подворний А. В., Бондарський О. Г. Вариційний принцип стосовно встановлення параметрів вільних коливань товстостінної пружної анізотропної циліндричної оболонки. Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: збірник наукових праць. Рівне, 2021. Вип. 40. С. 197–212.

Trach V. M., Podvornyy A. V., Bondars'kyi O. H. Variatsiynyy pryntsyyp stosovno vstanovlennya parametriv vil'nykh kolyvan' tovstostinnoyi pruzhnoyi anizotropnoyi tsylindrychnoyi obolonky. Resursoekonomni materialy, konstruktsiyi, budivli ta sporudy: zbirnyk naukovykh prats'. Rivne, 2021. Vyp. 40. S. 197–212.

2. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Vasidzu K. Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti. – М.: Mir, 1987. – 542 s.

3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Наука, 1977. – 415 с.

Lekhnitskiy S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela. – 2-ye izd., ispr. i dop. – М.: Nauka, 1977. – 415 s.

4. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задачи теории упругости неоднородных тел. – К.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

Grigorenko YA.M., Vasilenko A.T., Pankratova N.D. Zadachi teorii uprugosti neodnorodnykh tel. – К.: Nauk. dumka, 1991. – 216 s.

5. Podvorni A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of inhomogeneous cylindrical shells under distributed external pressure in a three-dimensional statement // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 6. P. 623 – 638.

6. Баженов В.А., Семенюк М.П., Трач В.М. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: Монографія. – К.: Каравела. – 2010. – 352 с.

Bazhenov V.A., Semenyuk M.P., Trach V.M. Neliniyne deformuvannya, stiykist' i zakrytychna povedinka anizotropnykh obolonok: Monohrafiya. – К.: Karavela. – 2010. – 352 s.